

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

## 子計畫一：桁架式三明治複合材料構件的可靠度評估

計畫類別：整合型計畫

計畫編號：NSC91-2212-E-009-020-

執行期間：91年08月01日至92年07月31日

執行單位：國立交通大學機械工程學系

計畫主持人：金大仁

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 92 年 10 月 27 日

# 桁架式三明治複合材料構件的研製-子計畫一： 桁架式三明治複合材料構件的可靠度評估

計畫編號：NSC 91-2212-E-009-020

執行期間：91年08月01日至92年07月31日

主持人：金大仁教授

國立交通大學機械工程學系

## 一、中文摘要

本三年計畫將應用反算和可靠度方法來研究桁架式三明治複合材料板的可靠性。在第三年的研究中，將應用第二年所推導出『藉量測結構的自然頻率來反算材料常數』的方法，探討複材板具彈性支承邊界(或自由端)之材料常數反求。經由實例驗證，可以確認此反求方法之可行性。有了正確的材料常數即可分析結構真實力學行為，並可進一步評估其可靠性。

**關鍵字：**複合材料，三明治板，材料常數，識別，可靠度。

## Abstract

The reliability of truss-type laminated composite sandwich plates is to be studied in this three-year project. Inverse and reliability methods are used in the reliability assessment of the sandwich plates. In this year, the use of an inverse method to identify the material constants of the plates is studied via both theoretical and experimental approaches. The inverse method utilizes a stochastic global minimization technique to minimize an error function comprising the differences between the theoretical and experimental frequencies. The minimization of the error function leads to the identification of the material constants of the sandwich plates.

**Keywords：** Composite materials, sandwich plate, reliability, inverse problem, minimization

## 二、緣由與目的

複合材料因具有高強度與重量比，且有很好的抗彎、抗腐蝕特性，所以相當廣泛的被應用於對高強度及低重量有特別要求的結構上，如航太結構、軍事裝備武器及休閒運動器材等用途上。而桁架式複合材料三明治構件，更是具有高剛度與質量比，擁有高挫屈之抵抗性，此外尚可提供特有的力學方向性與自然頻率分佈。

近來隨著複合材料的廣泛使用與高可靠度的需求，而以非破壞性方式識別其彈性常數逐漸受到重視與矚目。大體上這些文獻都是以超音波檢測或振動頻率測量配合模態以最佳化理論作為識別複合材料彈性常數，但是這些研究大都面臨以下的困難：(一)無法完全精確識別所有的彈性常數(二)自然頻率測量需使用到較不準確之高頻模態(三)彈性常數之識別結果誤差過大(四)無法識別複合材料三明治結構。因此，本研究之目的乃是提出一簡單、省時、精確、可靠且為非破壞性之方式，利用結構前幾個低頻振動頻率來識別桁架式複合材料構件之彈性常數與邊界支撐勁度，並進而評估其可靠度。

## 三、反算問題

本研究是混合實驗及數值方法來反

求桁架式複合材料三明治構件的材料性質與邊界支撐勁度，首先建立以實驗量測與理論預測之自然頻率差值的平方為原始目標函數的最小化問題，即

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad e(x) = (\underline{\omega}^*)^T (\underline{\omega}^*) \quad (1) \\ & \text{Subject to} \quad x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad i=1 \sim N \end{aligned}$$

其中  $x = [E_1, E_2, G_{12}, G_{23}, \nu_{12}, E, \nu, E_{b1}, \dots, E_{bn}]$ ， $E_1, E_2, G_{12}, G_{23}, \nu_{12}$  與  $E, \nu$  分別為面層與心層之材料常數， $E_{b1}, \dots, E_{bn}$  則為邊界支撐的勁度； $\underline{\omega}^*$  為  $M \times 1$  的向量是代表實驗測量及理論分析  $M$  個自然頻率差值； $e(x)$  即為目標函數； $x_i^L, x_i^U$  為材料常數的下限及上限，此為一受限制條件的最佳化問題。

$$\underline{\omega}_i^* = \frac{\omega_{pi} - \omega_{mi}}{\omega_{mi}} \quad (2)$$

接下來利用延伸性拉格蘭吉(Augmented Lagrange Multiplier Method)的方法[1]，將上列問題變成無限制條件的問題，即

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(x, \underline{\mu}, \underline{\eta}, r_p) &= e(x) + \sum_{j=1}^4 [\mu_j z_j + r_p z_j^2 + \eta_j \phi_j + r_p \phi_j^2] \\ \text{with} \quad z_j &= \max \left[ g_j(x_j), \frac{-\mu_j}{2r_p} \right] \\ g_j(x_j) &= x_j - x_j^U \leq 0 \\ \phi_j &= \max \left[ H_j(x_j), \frac{-\eta_j}{2r_p} \right] \\ H_j(x_j) &= x_j^L - x_j \leq 0 \quad j=1 \sim N \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\mu_j, \eta_j, r_p$  為拉格藍吉乘子，疊代關係為：

$$\begin{aligned} \mu_j^{n+1} &= \mu_j^n + 2r_p^n z_j^n \quad (4) \\ \eta_j^{n+1} &= \eta_j^n + 2r_p^n \phi_j^n \quad j=1 \sim N \\ r_p^{n+1} &= \begin{cases} \gamma_0 r_p^n & \text{if } r_p^{n+1} < r_p^{\max} \\ r_p^{\max} & \text{if } r_p^{n+1} \geq r_p^{\max} \end{cases} \end{aligned}$$

其中  $n$  表示疊代次數，而各個疊代起始值則設定如下：

$$\begin{aligned} \mu_j^0 &= 1.0 & \eta_j^0 &= 1.0 & r_p^0 &= 0.4 \\ \gamma_0 &= 1.25 & r_p^{\max} &= 100 \end{aligned} \quad (5)$$

藉由上述的方法，可以得到新的目標函數。配合多起始點方法及貝氏分析法所發展的總域極小化演算法[2]，可以求解此最佳化反算問題。

#### 四、材料常數識別

複合材料結構易受不同的製程影

響，對材料性質有很大的差異，可能因不同的製程規劃、施工設備、人員與時間，其製作的複合材料成品結構性質可能有所差異，一般除了標準拉伸試驗可測知材料常數外，並無一簡單、省時、精確的替代方法，這對複合材料結構成品件之可靠度帶來不可預知的結果。而且桁架式複合材料三明治結構，其外形相對複雜，且製程也比拉伸試片困難，並無法應用標準拉伸試驗來有效決定其材料常數。若要精確預知構件之力學行為，先要有正確的材料常數與邊界支撐之勁度，才可進一步評估其可靠度。因此，如何有效且正確的反算出材料性質是非常重要的。

本研究將以限制性總域極小化程序，配合振動實驗測量與應用里茲方法分析，以隨機多起始點搜尋、設計變數與梯度單位化，識別桁架式複合材料三明治板件之彈性常數與邊界支撐之勁度。

##### (一) 振動測量實驗：

振動測量設備包括頻譜分析儀、激振器、加速規，將試片固定於夾具中，連接激振器、頻譜分析儀、加速規。實驗進行時，先由頻譜分析儀產生一掃頻訊號，送入激振器激振試片，並以加速規量測試片之振動訊號傳給頻譜分析儀，分析儀利用快速傅立葉轉換求得複合材料三明治層板的頻率域響應，即可得到(2)式中之  $\omega_{mi}$ 。

##### (二) 理論分析：

將猜測的材料常數與邊界支撐勁度性質代入應用里茲方法之分析理論中，即可得到自然頻率預測值(2)式中之  $\omega_{pi}$ 。

#### 五、結果與討論

本研究將利用前面介紹之反算方法進行材料常數之反求，並與 MTS 拉伸試驗所得材料常數作比較，確認本研究之精確性。文中將以不同疊層角度、尺寸與邊界

之複合材料積層板來進行探討，所使用的複合材料其材料常數為  $E_1=147.503\text{GPa}$ 、 $E_2=9.223\text{GPa}$ 、 $\nu_{12}=0.306$ 、 $G_{12}=6.8356\text{GPa}$ ，彈性支承有半圓弧形剖面之彈性支承與泡棉雙面膠兩種，前者以平移彈簧常數  $K$  來模擬邊界之情形，忽略旋轉彈簧之效應；後者則以楊氏係數  $E_b$ 、寬度  $b$  和厚度  $h_b$  來模擬等效之平移與旋轉彈簧常數 ( $K=E_b b/h_b$  與  $R=E_b b^3/12h_b$ )。

#### (一) 以『理論分析』之情形

1.  $[0^\circ]_{12}$  複合材料積層板(長寬厚為  $11\text{ cm} \times 11\text{ cm} \times 0.18\text{ cm}$ )四邊邊界為泡綿雙面膠之彈性支承，假設其邊界泡綿之彈性常數  $E_b=0.386\text{MPa}$ 。並且以理論分析所得之自然頻率取代實驗量測值，而設計變數有效限制範圍設定為  $0 \leq E_1 \leq 400\text{GPa}$ ； $0 \leq E_2 \leq 40\text{GPa}$ ； $0 \leq \nu_{12} \leq 0.5$ ； $0 \leq E_b \leq 1\text{MPa}$ 。先由 IMSL 軟體之 RNUN 副程式隨機選取一起始點，再利用本文之反求方法進行總域極小化演算程序；當可靠度達到  $P = 0.99$  即停止運算。由於自然頻率所取不同之正確小數位數，使得反求之材料常數值有所差異(如表 1 所示)。因此可以知道整個反算的過程，頻率量測具有很重要的影響。所以，要有很好的反算結果，勢必要有精確的頻率量測才行。

#### (二) 邊界為自由端之情形

1.  $[0^\circ]_{12}$  複合材料積層板 (長寬厚為  $11.15\text{ cm} \times 11.07\text{ cm} \times 0.1452\text{ cm}$ )四邊邊界為自由端，經由自然頻率實驗量測與理論分析，發現前六個自然頻率中之最大誤差為 mode 1 達到-5.848%，而設計變數有效限制範圍設定為  $0 \leq E_1 \leq 200\text{GPa}$ ； $0 \leq E_2 \leq 20\text{GPa}$ ； $0 \leq \nu_{12} \leq 0.5$ 。反求演算程序和前面一樣，當可靠度達到  $P = 0.99$  即停止運算。最後經歷 11 次之迭代，求得材料常數之反算值，其中以  $G_{12}=6.058\text{GPa}$  與 MTS 拉伸試驗所得之結果誤差為-11.38%最大，其餘材料常數誤差絕對值皆小於 3%以

內(如表 2a 所示)

2.  $[0^\circ]_8$  複合材料積層板 (長寬厚為  $21\text{ cm} \times 21\text{ cm} \times 0.09779\text{ cm}$ )四邊邊界為自由端，經由自然頻率實驗量測與理論分析，發現前六個自然頻率中之最大誤差為 mode 6 的-3.042%，而設計變數有效限制範圍設定為  $0 \leq E_1 \leq 200\text{GPa}$ ； $0 \leq E_2 \leq 20\text{GPa}$ ； $0 \leq \nu_{12} \leq 0.5$ 。反求演算程序和前面一樣，最後經歷 9 次之迭代，求得材料常數之反算值，其中以  $E_1=137.234\text{GPa}$  與 MTS 拉伸試驗所得之結果誤差為-6.96%最大，其餘材料常數誤差絕對值皆小於 3.56%以內(如表 2b 所示)

3.  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_3$  複合材料積層板(長寬厚為  $28.1\text{ cm} \times 28.075\text{ cm} \times 0.078\text{ cm}$ )四邊邊界為自由端，經由自然頻率實驗量測與理論分析，發現前六個自然頻率中之最大誤差為 mode 1 的 7.599%，而設計變數有效限制範圍設定為  $0 \leq E_1 \leq 200\text{GPa}$ ； $0 \leq E_2 \leq 20\text{GPa}$ ； $0 \leq \nu_{12} \leq 0.5$ 。反求演算程序和前面一樣，最後經歷 7 次之迭代，求得材料常數之反算值，其中以  $G_{12}=7.514\text{GPa}$  與 MTS 拉伸試驗所得之結果誤差為 9.92%最大，其餘材料常數誤差絕對值皆小於 2.83%以內(如表 2c 所示)。

#### (三) 邊界為彈性支承之情形

1.  $[\pm 45^\circ]_{25}$  複合材料積層板(長寬厚為  $22.1\text{ cm} \times 22.1\text{ cm} \times 0.0932\text{ cm}$ )四邊邊界為半圓弧形剖面之彈性支承，其邊界材料性質可藉由 MTS 測試得到單位長度之彈簧常數  $K=1.1997\text{kN/m}^2$ 。經由自然頻率實驗量測與理論分析，發現前五個自然頻率中之最大誤差為 mode 4 達到 1.48%，而設計變數有效限制範圍設定為  $0 \leq E_1 \leq 200\text{GPa}$ ； $0 \leq E_2 \leq 20\text{GPa}$ ； $0 \leq \nu_{12} \leq 0.5$ ； $0 \leq K \leq 10\text{kN}$ 。反求演算程序和前面一樣，最後經歷 5 次之迭代，求得材料常數之反算值，其中以  $E_2=10.424\text{GPa}$  與 MTS 拉伸試驗所得之結果誤差為 13.02%最大，其餘材料常數誤差絕對

值皆小於 10%以內(如表 3a 所示)。

2.  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  複合材料積層板(長寬厚為 11 cm × 11 cm × 0.04 cm)四邊邊界使用泡綿雙面膠為彈性支承,其邊界材料性質可先由 MTS 測試得到泡綿之彈性常數  $E_b=65.4\text{KPa}$ 。經由自然頻率實驗量測與理論分析,發現前五個自然頻率中之最大誤差為 mode 1 達到-1.698%,而設計變數有效限制範圍設定為  $0 \leq E_1 \leq 400\text{GPa}; 0 \leq E_2 \leq 40\text{GPa}; 0 \leq \nu_{12} \leq 0.5; 0 \leq E_b \leq 100\text{kPa}$ 。反求演算程序和前面一樣,最後經歷 14 次之迭代,求得材料常數之反算值,其中以  $E_1=137.667\text{GPa}$  與 MTS 拉伸試驗所得之結果誤差為-6.67%最大,其餘材料常數誤差絕對值皆小於 5.48%以內(如表 3b 所示)。

經由上述之分析討論,發現有些誤差存在,其主要可能原因:一是理論分析時對結構尺寸大小之模擬與實際有所出入,另

一是自然頻量測誤差所造成。但大致上,不論邊界為自由端或是彈性支承,反求結果皆是相當不錯,因此可以驗證本方法之準確與可行性。藉由本方法將可進一步對桁架式複合材料構件之彈性常數與邊界支撐勁度進行識別及可靠度評估,而且是一簡單、精確、有效且非破壞性之方式。

### 參考文獻

1. Vandperlaats, G N., 1984, Numerical Optimization Techniques for Engineering Design : with Application., McGraw-Hill Inc.
2. Snyman, J. A., and Fatti, L. P., 1987, A Multi-Start Global Minimization Algorithm with Dynamic Search Trajectories., J. Of Optim. Theo. And Appl., 54, pp. 121-141.

表 1 『理論分析』模擬具彈性支承之情形

Plate lay-up	Measured natural frequency (Hz)						Identified material constants
	方法	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	
$[0^\circ]_{12}^a$	分析(取小數點後一位)	546.2	832.6	1153.5	1331.9	1356.5	$E_1=147.699\text{GPa}$ (0.133%) $E_2=9.228\text{Pa}$ (0.054%) $G_{12}=6.84\text{GPa}$ (-0.07%) $\nu_{12}=0.3017$ (-1.4052%) $E_b=0.38598\text{MPa}$ (-0.0052%)
	分析(取小數點後三位)	546.172	832.641	1153.469	1331.892	1356.494	$E_1=147.503\text{GPa}$ (0.0%) $E_2=9.223\text{Pa}$ (0.0%) $G_{12}=6.8356\text{GPa}$ (0.0%) $\nu_{12}=0.306$ (0.0%) $E_b=0.386\text{MPa}$ (0.0%)

a : 長×寬×高=11 cm × 11 cm × 0.18 cm  $E_b=0.386\text{Mpa}$  b=1cm  $h_b=0.15\text{cm}$

表 2 邊界為自由端之情形

Plate lay-up	Measured natural frequency (Hz)							Identified material constants	Iteration
	方法	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6		
$[0^\circ]_{12}^a$	分析	254.907	292.257	596.925	805.699	1120.00	1155.65	$E_1=143.076\text{GPa}$ (-3.00%) $E_2=9.446\text{GPa}$ (2.42%) $G_{12}=6.058\text{GPa}$ (-11.38%) $\nu_{12}=0.30004$ (-1.95%)	11
	實驗	240	296.5	577.5	813.7	1104	1140		
	誤差 <sup>d</sup>	-5.848%	1.4518%	-3.254%	0.993%	-1.42%	-1.354%		
$[0^\circ]_8^b$	分析	47.811	55.615	114.142	153.321	213.802	222.776	$E_1=137.234\text{GPa}$ (-6.96%) $E_2=8.909\text{GPa}$ (-3.4%) $G_{12}=6.592\text{GPa}$ (-3.56%) $\nu_{12}=0.3001$ (-1.93%)	9
	實驗	47	54.5	114.5	149.5	212.5	216		
	誤差 <sup>d</sup>	-1.696%	-2.005%	0.314%	-2.492%	-0.609%	-3.042%		
$[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_5^c$	分析	22.305	54.875	71.043	86.293	97.114	137.223	$E_1=143.645\text{GPa}$ (-2.62%) $E_2=9.483\text{GPa}$ (2.83%) $G_{12}=7.514\text{GPa}$ (9.92%) $\nu_{12}=0.30006$ (-1.941%)	7
	實驗	24	51	68	91	101	140		
	誤差 <sup>d</sup>	7.599%	-7.062%	-4.28%	5.455%	4.001%	2.024%		

a : 長×寬×高=11.15 cm × 11.07 cm × 0.1452 cm

b : 長×寬×高=21 cm × 21 cm × 0.09779 cm

c : 長×寬×高=28.1 cm × 28.075 cm × 0.078 cm

d : (實驗 -分析) /分析

表 3 邊界為彈性支承之情形

Plate lay-up	Measured natural frequency (Hz)						Identified material constants	Iteration
	方法	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5		
[±45°] <sub>2S</sub> <sup>a</sup>	分析	19.103	27.510	27.567	73.119	93.403	E <sub>1</sub> =159.06GPa(7.835%) E <sub>2</sub> =10.424GPa(13.02%) G <sub>12</sub> =6.205GPa(-9.225%) ν <sub>12</sub> =0.30025(-1.879%) k=1.2715 kPa(5.987%)	5
	實驗	19.3	27.9	27.9	74.2	94.3		
	誤差 <sup>c</sup>	1.03%	1.42%	1.21%	1.48%	0.96%		
[0°/90°/0°] <sup>b</sup>	分析	146.996	238.223	356.495	402.321	410.491	E <sub>1</sub> =137.667GPa(-6.67%) E <sub>2</sub> =8.717GPa(-5.48%) G <sub>12</sub> =6.718GPa(-1.72%) ν <sub>12</sub> =0.30005(-1.94%) E <sub>b</sub> =68.113 kPa(-4.15%)	14
	實驗	144.5	236	358.5	395.5	412		
	誤差 <sup>c</sup>	-1.698%	-0.933%	0.56%	-1.695%	0.368%		

a : 長×寬×高=22.1 cm × 22.1 cm × 0.0932 cm k=1.1997kN/m<sup>2</sup> R=0

b : 長×寬×高=11 cm × 11 cm × 0.04 cm E<sub>b</sub>=65.4 kPa

c : (實驗 -分析)/分析