

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

## 三維 Timoshenko 梁在等角速度下的非線性穩態變形

### 及自由振動分析

## The nonlinear steady state deformation and free vibration analysis of three Dimensional Timoshenko Beam under constant angular velocity

計畫編號：NSC 90-2212-E-009-037

執行期限：90 年 08 月 1 日至 91 年 07 月 31 日

主持人：蕭國模 國立交通大學機械工程學系

### 中文摘要

本研究主要目的是推導一三維 Timoshenko 旋轉梁的運動方程式，並求在不同轉速時，軸向變形與扭轉變形的數值穩態解。本文並以數值例題探討不同的轉速時，不同的設定角、不同的斷面、不同的長度對旋轉梁穩態軸向及扭轉變形的影響。

**關鍵詞：**Timoshenko 梁、穩態解

### Abstract

The objective of this paper is to derive the equations of motion and to solve the steady state axial and torsional deformations for the doubly symmetric three dimensional rotating Timoshenko beam. Numerical examples are studied to investigate the effect of rotating speed, setting angle, cross section of the beam and length of the beam on the steady state axial and torsional deformations for the three dimensional rotating Timoshenko beam.

**Keywords :** Timoshenko beam, steady state

### 1 緒論

對於旋轉梁的振動分析已有很多的研究[1-5]。本研究主要目的是推導一三維 Timoshenko 旋轉梁的運動方程式並由此運動方程式求得旋轉梁在不同轉速時的穩態平衡方程式，再利用 Galerkin Method 求得旋轉梁在穩態時，軸向變形與扭轉變形的數值穩態解。

本文擬將[6]中提出的方法作適當的修改，並考慮扭率三次方項。

本文中將梁分割成  $N$  段，並利用 Galerkin 法求得旋轉梁穩態時轉速與節點變形參數間的非線性平衡方程式，再利用基於牛頓法的增量迭代法求得其解。

### 2 理論推導

#### 2.1 問題的描述

如圖. 1.所示，考慮一具均勻斷面且雙軸對稱之三維的 Timoshenko 梁，支承端以設定角  $S_0$  剛接在一圓柱上，該圓柱以等角速率  $\Omega$  繞其軸心旋轉。

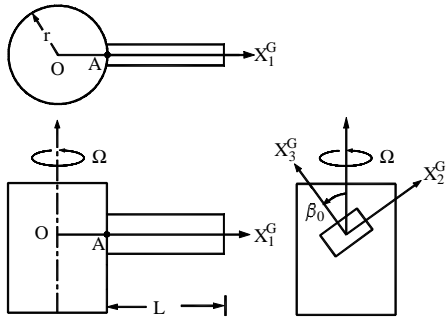


圖. 1. 旋轉梁之三視圖

## 2.2 基本假設

- (1) 梁為等斷面、雙對稱的 Timoshenko 梁。
- (2) 梁變形後，其斷面形狀不變，且斷面平面內的應變可以忽略。
- (3) 斷面之軸向翹曲位移量 (Warping Displacement) 為扭率與該斷面之 Saint Venant 翹曲函數之乘積。

## 2.3 座標系統

本研究採用共旋轉法 (co-rotational formulation)，為了描述梁元素及整個系統的運動，本文用了三個座標系統：

- (1) 總體旋轉座標系統， $X_i^G$  ( $i = 1, 2, 3$ ) (如圖. 2)。
- (2) 梁斷面座標系統， $x_i^S$  ( $i = 1, 2, 3$ ) (如圖. 2)。
- (3) 旋轉元素座標系統： $x_i^E$  ( $i = 1, 2, 3$ ) (如圖. 2)。

## 2.4 Timoshenko 梁的變形描述

令 Q 點 (如圖. 2) 為梁元素中的任意點，P 點為 Q 點在形心軸上的對應點，即 P 點與 Q 點位於梁的同一斷面上。在旋轉座標上，Q 點在變形前後的位置向量可以分別表示如下：

$$\mathbf{r}_0 = (r+x)\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \quad (1)$$

及

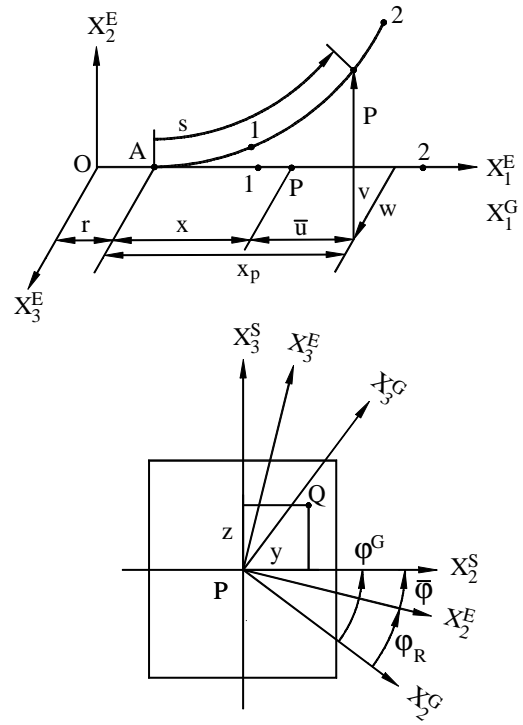


圖. 2. 座標系統

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (r+x+\bar{u})\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \\ &+ y\mathbf{e}_2^S + z\mathbf{e}_3^S + \zeta_{1,x}^S \tilde{S}(y,z)\mathbf{e}_1^S = r_i \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (2)$$

$$\bar{u} = u_s(x) + u(x,t) \quad (3)$$

$$\zeta_1 = \zeta_s(x) + \zeta_1(x,t) \quad (4)$$

其中  $t$  為時間， $r$  為旋轉圓柱的半徑， $x$  為梁的固定端 (A 點) 到 P 點在梁變形前的距離， $x_1 \leq x \leq x_2$ ， $x_j$  為元素節點  $j$  ( $j=1, 2$ )

變形前的  $X_1^E$  或  $X_1^G$  座標， $u_s(x)$ 、 $\zeta_s(x)$  分別為穩態的軸向位移與軸向扭轉角。因  $u_s(x)$  及  $\zeta_s(x)$  為有限量 (Finite quantity) 故在本文中  $\bar{u}$  及  $\zeta_1$  不視為一擾動量， $u, v, w$  是 P 點分別在  $X_1^E$ 、 $X_2^E$ 、 $X_3^E$  軸方向上的微小位移， $\zeta_{1,x}$  為梁的扭轉率， $\tilde{S}(y,z)$  為 Saint Venant 翹曲函數 (warping function)， $\mathbf{e}_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 為在  $X_i^E$  軸方向的單位向量， $\mathbf{e}_i^S$  ( $i=1, 2, 3$ ) 為在  $X_i^S$  軸方向的單位向量， $\mathbf{e}_i^S$  在變形前和  $\mathbf{e}_i$  的方向一致。 $\mathbf{e}_i$  及  $\mathbf{e}_i^S$  ( $i=1, 2, 3$ ) 在旋轉座標系統中的關係

可表示如下

$$\mathbf{e}_i^S = \mathbf{R} \mathbf{e}_i \quad (5)$$

其中  $\mathbf{R}$  為旋轉矩陣。

## 2.5 旋轉梁的運動方程式

本文利用虛功原理及 d'Alembert 原理在旋轉座標上推導旋轉梁的運動方程式。

## 2.6 旋轉梁的穩態分析

假設旋轉梁在穩態時只有軸向位移  $u_s$  及軸向的扭轉  $\zeta_s$ ，旋轉梁之穩態平衡方程式可表示成

$$EAu_{s,xx}(1+3u_{s,x}) + EI_p\zeta_{s,x}\zeta_{s,xx} + 3EI\zeta_{s,xx}\zeta_{s,xxx} + \dots Ah^2(R+x+u_s) = 0 \quad (6)$$

及

$$EI_p(u_{s,xx}\zeta_{s,x} + u_{s,x}\zeta_{s,xx}) + (GJ - \dots I\zeta h^2)\zeta_{s,xx} + \frac{3}{2}EI_4\zeta_{s,x}^2\zeta_{s,xx} + \dots h^2[\frac{1}{2}(I_y - I_z)\sin 2s - EI\zeta_{s,xxx} + (I_y - I_z)\zeta_{s,\cos 2s}] = 0 \quad (7)$$

## 2.7 旋轉梁穩態的平衡方程式

本研究以 Galerkin 法解旋轉梁之穩態平衡方程式，並可表示成

$$\mathbf{\emptyset} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \lambda) = \mathbf{0} \quad (8)$$

其中  $\mathbf{q}$  是由廣義節點位移組成的向量， $\mathbf{\emptyset}$  可視為不平衡力， $\mathbf{F}$  即是節點內力、 $\lambda$  為與轉速有關的負荷參數。

## 3 數值例題與結果

在本章中梁的長度  $L$  與斷面高度比，I 型斷面指的是  $L/d_{nom}$ ，其中  $d_{nom}$  為 I 型斷面的名義上的(nominal)高度，如  $W10 \times 100$  的  $d_{nom}$  為  $10 \text{ in}$ 。本章圖中  $F(c)$  代表函數  $F$  在無因次座標  $X=c$  的節點值，其中  $F$  為  $U_s, U'_s, \zeta_s, \zeta'_s, \zeta''_s, c=0, 0.2, 1$ ，

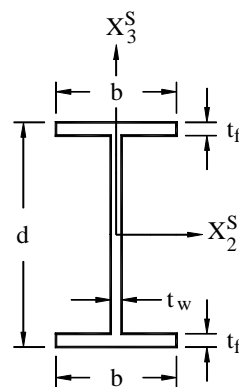


圖. 3. 梁的斷面圖

本章中  $\zeta_s$  代表總扭轉角。

如圖. 3.所示，本例題為 I 型斷面  $W10 \times 100$ ， $d = 11.1 \text{ in}$ ， $t_f = 1.12 \text{ in}$ ， $t_w = 0.68 \text{ in}$ ， $b = 10.34 \text{ in}$ 。本例題分析了  $L/d_{nom} = 50$ 、設定角  $s_o = 45^\circ$  的旋轉梁在  $\lambda \leq 0.01$  時的穩態解，圖. 4. 為 I 型斷面之旋轉梁在  $\lambda = 0.005, 0.01$  時在軸向的位移分佈圖。

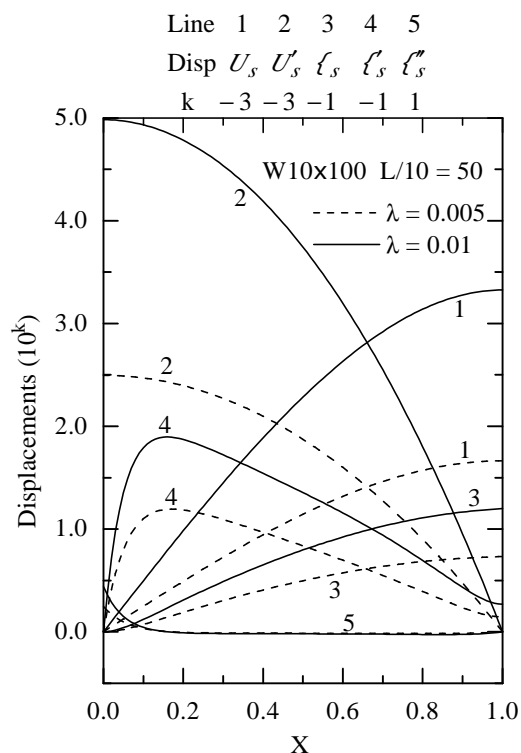


圖. 4. 位移分佈圖

由圖. 4. 中可以發現，斷面之軸向位移  $U_s$

的分佈是斜率逐漸減小(下凹)的曲線。軸向應變  $U'_S$  的曲線為  $U_S$  的斜率，由圖. 4. 中可以發現斷面之  $U'_S$  曲線在根部有最大值，然後隨著  $X$  的增加而漸漸減少。

#### 4 結論

本文利用共旋轉法非線性梁理論的一致線性化，虛功原理，d'Alembert 原理，在旋轉元素座標上推導出三維 Timoshenko 梁元素正確的運動方程式，並由此運動方程式求得旋轉梁穩態時的平衡方程式。再利用 Galerkin 法及基於標準牛頓法的增量迭代法求得旋轉梁在不同轉速的穩態解。由數值結果我們可以觀察到以下的結論：

- (1) 當設定角為 0 度或 90 度或  $I_y = I_z$  時，旋轉梁只有軸向變形沒有扭轉變形。當設定角改變時，軸向位移的最小值和扭轉位移的最大值發生在同一個設定角，所以其間的耦合關係，明顯可見。
- (2) 當長度增加時，除了 I 型斷面在自由端的無因次軸向位移會先減少再增加外，橢圓斷面與十字斷面在自由端的無因次軸向位移會增加。
- (3) 當扭轉角較大時，其最大值發生在  $S_r = 30^\circ$ ，當扭轉角較小時，其最大值發生在  $S_r = 45^\circ$ 。
- (4) 旋轉梁的軸向應變在其根部有最大值。

#### 5 參考文獻

- [1] Schilhansl M. J. , "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," ASME Journal of Applied Mechanics = 25, pp. 28-30, 1958.
- [2] Eick C. D. and Mignolet M. P., "Vibration and Buckling of Flexible Rotating Beams," AIAA Journal, 33, No. 3, pp. 528-538, 1995.
- [3] Yokoyama T. , "Free Vibration Characteristics of Rotating Timoshenko Beam , " International Journal of Mechanical Science, 30, No. 10, pp. 743-755, 1988.
- [4] 洪船島, "旋轉梁結構之振動分析," 國立交通大學機械工程研究所, 碩士論文, 臺灣, 新竹, 1997.
- [5] 周志芳, "旋轉梁之自由振動的級數解法," 國立交通大學機械工程研究所, 碩士論文, 臺灣, 新竹, 1998.
- [6] Hsiao K. M., "Corotational Total Lagrangian Formulation for Three-Dimensional Beam Element," AIAA Journal, 30, No. 3, pp. 797-804, 1992.
- [7] Hsiao K. M., Lin J. Y., "A Consistent Co-rotational Finite Element Formulation for Geometrically Nonlinear Dynamic Analysis of 3-D Beams", Comput. Method Appl. Mech. Engng. 169, pp. 1-18, 1999.
- [8] Gregory M. , "A Nonlinear Bending Effect When Certain Unsymmetrical Sections are Subjected to a Pure Torque", Australian J. Appl. Sci., Vol. 11, 1960, pp. 33-48.