

國防科技學術合作協調小組研究計畫成果報告

設計控制系統可靠度控制器之研究

Study of Reliable Control Design

計畫編號：NSC 90-CS-7-009-004

執行期間：90 年 1 月 1 日 至 90 年 12 月 31 日

計畫主持人：梁 耀 文

執行單位：國 立 交 通 大 學

中華民國 九 十 年 十 二 月 三 十 一 日

目 錄

目錄	I
圖例目錄	III
表格目錄	V
提要	VI
第一章 前言	1
1.1 研究緣起與背景	1
1.2 研究目的與研究動機	2
1.3 研究方法與步驟	3
1.4 預期目標	4
第二章 可靠度控制器之設計	5
2.1 問題描述	5
2.2 閉迴路系統之穩定性分析	9
2.3 性能表現評估	10
2.4 H-J 不等式二次解之存在分析	11
2.5 數值求解 H-J 方程式之近似解	15
第三章 衛星系統可靠度控制之應用分析	17
3.1 衛星動態方程式之推導	17
3.1.1 座標軸系統	17
3.1.2 衛星動態方程式	19
3.2 衛星系統之可控性分析	23
第四章 數值模擬結果與討論	27
4.1 參數設定	27
4.2 模擬結果與討論	28

第五章 結論	51
參考文獻	53
附錄 A	56

圖例目錄

圖 3.1	軌道座標系	18
圖 3.2	衛星本體示意圖	22
圖 4.1	針對 B 設計控制器對 B 狀況控制 (1st) 之結果.....	31
圖 4.2	針對 B 設計控制器對 B1 狀況控制 (1st) 之結果	31
圖 4.3	針對 B 設計控制器對 B2 狀況控制 (1st) 之結果	32
圖 4.4	針對 B 設計控制器對 B3 狀況控制 (1st) 之結果	32
圖 4.5	針對 B 設計控制器對 B4 狀況控制 (1st) 之結果	33
圖 4.6	針對 B 設計控制器對 B 狀況控制 (2nd) 之結果.....	33
圖 4.7	針對 B 設計控制器對 B1 狀況控制 (2nd) 之結果	34
圖 4.8	針對 B 設計控制器對 B2 狀況控制 (2nd) 之結果	34
圖 4.9	針對 B 設計控制器對 B3 狀況控制 (2nd) 之結果	35
圖 4.10	針對 B 設計控制器對 B4 狀況控制 (2nd) 之結果	35
圖 4.11	針對 B 設計控制器對 B 狀況控制 (3rd) 之結果.....	36
圖 4.12	針對 B 設計控制器對 B1 狀況控制 (3rd) 之結果	36
圖 4.13	針對 B 設計控制器對 B2 狀況控制 (3rd) 之結果	37
圖 4.14	針對 B 設計控制器對 B3 狀況控制 (3rd) 之結果	37
圖 4.15	針對 B 設計控制器對 B4 狀況控制 (3rd) 之結果	38
圖 4.16	針對 B2 設計控制器對 B 狀況控制 (1st) 之結果	38
圖 4.17	針對 B2 設計控制器對 B1 狀況控制 (1st) 之結果.....	39
圖 4.18	針對 B2 設計控制器對 B2 狀況控制 (1st) 之結果.....	39
圖 4.19	針對 B2 設計控制器對 B3 狀況控制 (1st) 之結果.....	40
圖 4.20	針對 B2 設計控制器對 B4 狀況控制 (1st) 之結果.....	40
圖 4.21	針對 B2 設計控制器對 B 狀況控制 (2nd) 之結果	41

圖 4.22 針對 B2 設計控制器對 B1 狀況控制 (2nd) 之結果.....	41
圖 4.23 針對 B2 設計控制器對 B2 狀況控制 (2nd) 之結果.....	42
圖 4.24 針對 B2 設計控制器對 B3 狀況控制 (2nd) 之結果.....	42
圖 4.25 針對 B2 設計控制器對 B4 狀況控制 (2nd) 之結果.....	43
圖 4.26 針對 B2 設計控制器對 B 狀況控制 (3rd) 之結果	43
圖 4.27 針對 B2 設計控制器對 B1 狀況控制 (3rd) 之結果.....	44
圖 4.28 針對 B2 設計控制器對 B2 狀況控制 (3rd) 之結果.....	44
圖 4.29 針對 B2 設計控制器對 B3 狀況控制 (3rd) 之結果.....	45
圖 4.30 針對 B2 設計控制器對 B4 狀況控制 (3rd) 之結果.....	45
圖 4.31 針對 B12 設計控制器對 B12 狀況控制 (1st) 之結果.....	46
圖 4.32 針對 B12 設計控制器對 B12 狀況控制 (1st) 之結果.....	46

表格目錄

表 4.1 利用線性控制器控制系統之各種狀況之性能比較	47
表 4.2 利用(線性+二階)控制器控制系統之各種狀況之性能比較	47
表 4.3 利用(線性+二階+三階)控制器控制系統之各種狀況之性能比較	49
表 4.4 不同增益值時 $\int (x^T Qx + u^T Ru) dt$ 之性能分析 (針對 B2 設計)	50

提 要

近年來，設計控制系統可靠度控制的議題已深受許多學者專家的重視。其設計的目的在於希望當系統某些特定的控制元件（如致動器 actuator 與偵測器 sensor）發生不正常狀況（包括老化及故障現象）時，系統仍能維持正常穩定的運作且達到基本的性能（performance）要求。在此計劃中，我們不但提出了可靠度控制器之設計法則，而且也分析了閉迴路系統之穩定性及估測可靠度控制器之性能表現，同時對於可靠度控制器增益之容許範圍也進行估測。更進一步，由於可靠度控制器必須獲得 Hamilton-Jacobi 不等式之解，我們也分析了其二次解的存在條件及演算法則。最後我們也將所獲得的可靠度控制法則應用於衛星姿態之可靠度控制分析，以驗證所提出理論之可行性。

1. 前言

1.1 研究緣起與背景

近年來，已有許多國內外的學者專家投注在可靠度控制的研究上，並已提出許多研究成果[8, 10, 16-18]，然而這些研究成果大多集中在理論上的分析，應用到實際系統的例子並不多。此外，這些研究成果多半偏重於處理線性系統的可靠度控制議題。例如，Vidyasagar 及 Viswanadham 在頻域 (frequency domain) 上藉由穩定互質技巧 (stable coprime factorization technique) 提出如何設計額外的一組控制器，使得擴充系統之兩組控制器中任何一組失效而另一組正常時系統仍能維持穩定運作[14]；Veillette 使用修正 LQ 迴授控制 (modified LQ regulator) 及代數 Riccati 方程式的處理手法發展出一套可靠度控制器的設計準則，在此設計下的控制系統能容忍某些特定的致動器產生不正常的情況而仍能維持穩定運作且達到預估的二次性能表現[16]；Yang 等人則利用 H_∞ 最佳化的方法探討非線性系統某些特定元件失效時如何設計可靠度控制器使系統仍能保證穩定及維持 H_∞ 性能表現的條件[17, 18]。

雖然可靠度控制可應用的層面非常廣，但現階段應用到實際系統的例子並不多，尤其是目前尚未看到應用在衛星系統定位的議題上。然而，人造衛星科技的發展在國防科技工業上扮演著很重要的角色，由於我國中華衛星一號研發及運行的成功，更使我國在航太科技上邁向一個新的里程碑。在有了第一次好的成果之後，我國更致力於中華衛星二號的發展，而

華衛二號其主要的任務是對臺灣陸地及海域進行衛星影像資料之擷取，以作為農林規劃、環境監控、災害評估、土地利用、科學研究等相關之用途，也因為此關係，所以對於華衛二號的研究與發展是相當重要的。因此，為了能有效的讓衛星在軌道上穩定的運行，將可靠度控制應用於衛星系統的控制上，使衛星系統即使是在致動器故障的情況下，也能達到良好的性能，是我們所期待的。

1.2 研究目的與研究動機

可靠度控制的目的是希望當系統某些特定的控制元件（如致動器 actuator 與偵測器 sensor）發生不正常狀況（包括老化及故障現象）時，系統仍能維持正常穩定的運作且達到基本的性能（performance）要求。此議題肇因於控制元件無法避免老化及故障現象的發生，這些現象可能導致系統發生不穩定而無法順利完成任務，甚至可能因而造成嚴重的傷害。例如，飛彈執行攔截任務時，部分彈翼可能無法順利操控或導引雷達及無線電波無法發揮正常功能而導致任務失敗；人造衛星執行任務時，也可能因噴嘴或機械故障無法順利定位或執行其他任務；高危險區域如核電廠、煉鋼廠、煉油廠之系統也有可能因機件故障而產生大災難。解決此問題的一個可行方法是當不正常現象發生時，適時的切換控制法則則避免不穩定現象的發生。然而，這麼一來不但需要增加偵測器使系統的複雜度不斷提高，更需要考慮偵測器的可靠度（reliability）問題，也就是要考慮偵測器也有可能發生故障的問題。因此，本計劃的目標就是希望在不增加系統複雜度的情況下設計可靠度控制法則，使得系統在某些特定的控制元件發生不正常現象時，系統仍能維持正常穩定的運作且達到基本的性能表現。

在應用方面，由於衛星運行於太空軌道，一旦其致動器發生故障時，不但無法馬上修復而且修復費用相當昂貴。因此，如何使衛星系統在部份致動器發生故障時仍能穩定運行是極重要的課題。在本計劃中，我們將針對衛星之姿態控制進行可靠度控制理論的分析與驗證。

1.3 研究方法與步驟

可靠度控制一般分為主動式可靠度控制(Active reliable control)和被動式可靠度控制(Passive reliable control)兩種。主動式可靠度控制為透過設計錯誤偵測與診斷機制隨系統當時的狀況組織控制法則，其優點為能充分發揮系統在各種狀態下之性能表現，而缺點則是必須增加監測器、使成本提升及提高系統複雜度，同時必需考慮監測器之可靠度問題及診斷機制可能產生誤報及漏報之狀況。不適用於當錯誤發生時容許反應時間極短之系統。另一方面，被動式可靠度控制則強調設計固定之控制器使閉迴路系統能容忍特定異常現象之發生。其優點為不需額外花費時間及成本作錯誤偵測、診斷及控制器重組之工作，對於當異常現象發生時容許反應時間極短之系統特別重要，然而其缺點則為必需犧牲正常狀況之部分性能表現。在本計劃中我們將進行被動式可靠度控制之研究。

首先，我們將利用最佳控制方法對故障系統在二次性能指標下進行最佳化設計，希望所設計的控制器不但能使系統在正常情況下達到穩定的功效，也能使故障系統同樣的獲得穩定。其次，我們將估測可靠度控制器之性能表現。在實際的情況下，由於致動器的輸出可能會產生放大或衰減的現象，我們接著將估測可靠度控制器能確保系統穩定之增益容許範圍。此外，在推導可靠度控制器的過程中，我們必須用到 Hamilton-Jacobi 不等式之解，因此，我們也將分析其二次解存在的條件及其求解之演算法則。

最後，這些理論結果也將應用於衛星姿態控制之可靠度控制分析上。

1.4 預期目標

本計劃的目標是希望在不增加系統的複雜度及負擔的情況下設計可靠度控制法則，使得系統在某些特定的控制元件發生不正常現象時，系統仍能維持正常穩定的運作且達到基本的性能表現。

2. 可靠度控制器之設計

2.1 問題描述

在此計劃中我們考慮如下之非線性系統

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad f(0) = 0 \quad (2.1)$$

其中 $x \in R^n$ 代表狀態變數(State Variable), $u \in R^m$ 代表控制輸入(Control input), $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x)) \in R^{n \times m}$, 且 $f(x)$ 及 $g_i(x)$ 都是平滑向量場(Smooth Vector Field)。本計劃的主要目標為設計適當之控制器使閉迴路系統在不改變控制法則的情況下能容忍某些特定之致動器發生故障且使下列之指標函數 J 達到最小

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2.2)$$

上式中, $Q \geq 0$ 及 $R > 0$ 是兩個常數矩陣。

一般而言, 針對正常系統進行最佳化控制器設計時, 系統在正常狀況下固然可以獲得最佳的性能表現。然而, 當系統發生致動器故障狀況時, 整各系統可能導致令人無法接受的性能表現, 包括呈現出不穩定現象。舉例來說, 考慮如下之線性控制系統:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = I_4, \quad R = I_2 \quad (2.3)$$

首先，我們針對正常系統進行最佳化設計，所獲得的正常閉迴路系統

$$A_c = A - BR^{-1}B^T P \quad (2.4)$$

其特徵根如下：

$$\lambda(A_c) = \{-1.43 \pm 0.95j, -2.28 \pm 0.56j\}$$

其中 P 是如下 Riccati equation 的解：

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (2.5)$$

在此情況下閉迴路系統不但穩定而且性能指標 J 將會達到最小。然而，在此一控制器下如果第一個致動器發生故障時閉迴路系統變成

$$A_c = A - B_1 R^{-1} B_1^T P \quad (2.6)$$

$$\text{其中 } B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

經由計算我們獲得

$$\lambda(A_c) = \{-0.63 \pm 1.27j, -2.43, 0.96\}$$

很明顯的，此時的閉迴路系統將有右半平面的特徵根出現。也就是說，當系統第一個致動器出現故障將導致系統出現不穩定的後果。從另一個角度來看，如果我們改變控制器的設計方式，針對 $(A \ B_1)$ 進行最佳化設計，經由計算，此時閉迴路系統

$$A_c = A - B_1 R^{-1} B_1^T P \quad (2.8)$$

的特徵根如下：

$$\lambda(A_c) = \{-1.13 \pm 0.91j, -1, -2.47\}$$

其中 P 是如下之 Riccati Equation 的解：

$$A^T P + PA - PB_1 R^{-1} B_1^T P + Q = 0 \quad (2.9)$$

很明顯的，此系統在第一個致動器故障的情況下的確是穩定的。而且，此

一控制器是系統第一個致動器發生故障的情況下使系統性能指標最佳者。其次，使用同一個控制器在系統正常的情況下我們獲得的閉迴路系統特徵根如下：

$$\lambda(A_c) = \{-44.65, -0.78 \pm 1.18j, -2.43\}$$

很明顯的，此一新引進的設計方式不但使故障系統穩定，同時也使正常系統達到穩定的功效。接下來，我們將對此一設計理念做更進一步的描述：

首先，我們將所有致動器劃分為如下兩部份：

Ω ：允許故障產生之致動器所成的集合

Ω' ：不允許故障產生之致動器所成的集合

$\Omega \cup \Omega' =$ 所有致動器

針對 $g(x)$ ， u 及 R 我們也進行同樣的分割，其型式如下：

$$g(x) = (g_{\Omega'}(x), g_{\Omega}(x)) \quad (2.10)$$

$$u = \begin{pmatrix} u_{\Omega'} \\ u_{\Omega} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

$$R = \begin{pmatrix} R_{\Omega'} & 0 \\ 0 & R_{\Omega} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

系統在此分割下之狀態方程式可改寫如下：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ &= f + (g_{\Omega'} g_{\Omega}) \begin{pmatrix} u_{\Omega'} \\ u_{\Omega} \end{pmatrix} \\ &= f + g_{\Omega'} u_{\Omega'} + g_{\Omega} u_{\Omega} \end{aligned} \quad (2.13)$$

其次，我們假設在最壞的設計情況下系統仍然可被穩定，也就是說，在所有允許發生故障的致動器都故障的情況下，系統仍可穩定。

假設一：(f, g_Ω)可穩定。

由最佳控制理論可設計 u_Ω 如下：

$$u_{\Omega}^* = -\frac{1}{2}R_{\Omega}^{-1}g_{\Omega}^T(x)V_x(x) \quad (2.14)$$

其中 V_x(x) 為 V(x) 之梯度向量且 V_x(x) 為如下 Hamilton-Jacobi (H-J) 方程式之解：

$$V_x^T(x)f(x) + x^T Qx - \frac{1}{4}V_x^T(x)g_{\Omega}(x)R_{\Omega}^{-1}g_{\Omega}^T(x)V_x(x) = 0 \quad (2.15)$$

由於 u_Ω^{*} 包含有 H-J 方程式的解。因此，很自然的我們會引進如下假設

假設二：假設如下之 H-J 之不等式

$$V_x^T f - \frac{1}{4}V_x^T g_{\Omega} R_{\Omega}^{-1} g_{\Omega}^T V_x + x^T Qx \leq 0 \quad (2.16)$$

有平滑且半正定之解 V(x)。

在假設二我們使用了 H-J 不等式來取代 H-J 方程式。這將使得存在解的機會大增。就 Ω' 部分我們考慮的控制法則如下：

$$u_{\Omega'}^* = -\frac{1}{2}R_{\Omega'}^{-1}g_{\Omega'}^T(x)V_x(x) \quad (2.17)$$

因此，我們獲得整體控制輸入如下：

$$u^* = \begin{pmatrix} u_{\Omega'}^* \\ u_{\Omega}^* \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}R^{-1}g^T(x)V_x^T(x) \quad (2.18)$$

在此控制法則設計下，我們有如下定理

定理一：設計控制器如(2.18)所示，則閉迴路系統之原點在正常情況及所有允許之故障情況都是漸近穩定的(Asymptotic Stable)平衡點。

證明：此定理將於定理二中一併證明。

2.2 閉迴路系統之穩定性分析

在實際狀況下，致動器除了故障情況外，其輸出增益也會有放大或衰減情況。因此我們將致動器之輸出表示如下：

$$u = \begin{pmatrix} u_{\Omega'} \\ u_{\Omega} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

其中 $u_{\Omega'} = N_{\Omega'} u_{\Omega'}^*$ ， $u_{\Omega} = N_{\Omega} u_{\Omega}^*$ ，且 $N_{\Omega'}$ 及 N_{Ω} 是對角增益矩陣。

註： $N_{\Omega} = 0$ 時表示括號內之故障器全部故障

$N_{\Omega} = I$ 時表示括號內之故障器全部正常

底下我們將探討怎樣的增益 N_{Ω} 及 $N_{\Omega'}$ 下系統仍能維持穩定運作。

在考慮實際的致動器輸出 $u = \begin{pmatrix} N_{\Omega'} u_{\Omega'}^* \\ N_{\Omega} u_{\Omega}^* \end{pmatrix}$ 後閉迴路系統為

$$\dot{x} = f - \frac{1}{2} g_{\Omega'} N_{\Omega'} R_{\Omega'}^{-1} g_{\Omega'}^T V_x - \frac{1}{2} g_{\Omega} N_{\Omega} R_{\Omega}^{-1} g_{\Omega}^T V_x \quad (2.20)$$

引用 H-J inequality 可得

$$\dot{V} \leq -x^T Q x - \frac{1}{4} V_x^T g_{\Omega'} (2N_{\Omega'} - I) R_{\Omega'}^{-1} g_{\Omega'}^T V_x - \frac{1}{2} V_x^T g_{\Omega} N_{\Omega} R_{\Omega}^{-1} g_{\Omega}^T V_x \quad (2.21)$$

所以 $N_{\Omega'} \geq \frac{1}{2} I$ 且 $N_{\Omega} \geq 0 \Rightarrow \dot{V} \leq 0$

由 (2.14)、(2.17) 及 (2.21) 可知，若 $\dot{V} = 0 \Rightarrow x^T Q x = 0$ ， $u_{\Omega'}^* = 0$ 且 $u_{\Omega}^* = 0$ 。

為了保證漸近穩定 (Asymptotic Stable) 我們引進底下二個假設：

假設三： (f, h) ， $h(x) \equiv Q^{1/2} x$ 是局部可偵測 (locally detectable)。即存在

一個原點之鄰域 U 使得 $\dot{x} = f(x)$ 之狀態變數 $x(t)$ 滿足 $x(0) \in U$ 且

$$h(x(t)) = 0, \forall t \geq 0 \text{ 時} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \text{。}$$

假設四：之原點在集合內是 locally Lyapunov Stable

在假設三中局部可偵測的意義是在輸出端或性能表現 J 中沒有展現效應的部分必須趨近於零。也就是說系統可監控的部分已充分的展現其是否可穩定的特質。由以上的討論及假設我們可獲得如下定理：

定理二：系統之原點在 $N_{\Omega} \geq 0.5I$ 且 $N_{\Omega} \geq 0$ 的情況下都保證局部漸近穩定。

也就是在 Ω 族群內之致動器增益可允許在 $(0, \infty)$ 範圍而在 Ω' 族群內之致動器增益可允許在 $(0.5, \infty)$

2.3 性能表現評估

令 $N_{\Omega} = I$ 。也就是假設不容許損壞的致動器都在正常情況，則

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -x^T Qx - (u_{\Omega}^*)^T R_{\Omega} u_{\Omega}^* - \frac{1}{2} V_x^T g_{\Omega} N_{\Omega} R_{\Omega}^{-1} g_{\Omega}^T V_x \\ &\leq -x^T Qx - (u_{\Omega}^*)^T \dot{R}_{\Omega} u_{\Omega}^* - \frac{1}{4} V_x^T g_{\Omega} R_{\Omega}^{-1} N_{\Omega} R_{\Omega} N_{\Omega} R_{\Omega}^{-1} g_{\Omega}^T V_x \\ &\quad (\text{if } 0 \leq N_{\Omega} \leq 2I) \\ &= -x^T Qx - u^T \dot{R} u \\ &\Rightarrow V(x(\infty)) - V(x(0)) \leq -\int_0^{\infty} (x^T Qx - u^T R u) dt, \quad x(\infty) = 0 \quad (2.22) \end{aligned}$$

因此，我們獲得如下定理：

定理三：在前面四個假設及控制器如前所述之設計下閉迴路系統在致動器增益 $N_{\Omega} = I$ 及 $0 \leq N_{\Omega} \leq 2I$ 的情況下將會有如下之性能表現

(performance)

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \leq V(x_0) \quad (2.23)$$

其中 V 是 Hamilton-Jacobi Inequality 之解而 x_0 是起始狀態。

2.4 H-J 不等式二次解之存在分析

在可靠度控制器的推導過程中我們使用了 H-J 不等式來取代 H-J 方程式，這將使得可靠度控制器存在的機會大增。此外，由於 H-J 方程式不易求得確切解 (exact solution)，因此，我們先針對 H-J 不等式二次解的存在性進行分析。

首先，定義如下函數：

$$H(x, V_x) = V_x f - \frac{1}{4} V_x^T g g^T V_x + x^T Q x \quad (2.24)$$

則 H-J 不等式即為

$$H(x, V_x) \leq 0$$

因此，此節的目標如下：

目標：尋找 $V = x^T Q_v x$ ， $Q_v \geq 0$ 使得 $H(x, V_x) \leq 0$

為了尋找 $H(x, V_x) \leq 0$ 的半正定解 $V = x^T Q_v x$ ，我們引進了底下的 k-linear function 及兩個判斷函數正定性的結果。

假設 V_1, \dots, V_k 及 W 都是實向量空間，若多變數函數 $\phi: V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$ 對每一個變數 (其餘變數固定) 都是線性函數，則稱 ϕ 為 k-linear 函數。

我們考慮如下之實值函數 $\rho(y, z) = y^T P y + \rho_{yz} + \rho_{zy} + \rho_{zz} + R(y, z)$ 其中

$y \in \mathbb{R}^{n_1}$, $z \in \mathbb{R}^{n_2}$, ρ_{yzz} 是 (y, z, z) 之 3-linear 函數, ρ_{zz} 及 ρ_{zzz} 是 z 的 3-linear 和 4-linear 函數, $R(y, z)$ 是除 ρ_{yzz} , ρ_{zz} 及 ρ_{zzz} 外所有次數大於 2 的項的合成。

經由上述說明, 我們可以得到下列兩個結果:

結果一: 假設存在 $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ 及 $\beta_1 \geq 0$, 使得在原點附近 $y^T P y \geq \alpha_1 \|y\|^2$,

$$\rho_{zz} = 0, |\rho_{yzz}| \leq \beta_1 \cdot \|y\| \cdot \|z\|^2 \text{ 且 } \rho_{zzz} \geq \alpha_2 |z|^4, \text{ 則 } \rho(y, z) \text{ 是正定函數}$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha_1\alpha_2 > \beta_1^2$$

結果二: 設 P 是負定矩陣且在原點附近, $\rho_{yzz} = 0$, $\rho_{zz} = 0$ 且 $\rho_{zzz} < 0$ 則 $\rho(y, z)$

是負定函數。

接下來我們將利用結果一及結果二進行 H-J 不等式存在二次半正定解的分析:

首先我們將 $f(x)$ 及 $g_i(x)$ 進行泰勒展開式如下:

$$f(x) = L_f x + Q_f(x, x) + C_f(x, x, x) + o(\|x\|^3) \quad (2.25)$$

$$g_i(x) = g_i(0) + L_{g_i} x + Q_{g_i}(x, x) + o(\|x\|^2) \quad (2.26)$$

同理, 我們也將 $H(x, V_x^T)$ 依次數展開如下:

$$H(x, V_x^T) = H^{[2]} + H^{[3]} + H^{[4]} + o(\|x\|^4) \quad (2.27)$$

其中

$$H^{[2]} = x^T H_2 x \quad (2.28)$$

$$H_2 = L_f^T Q_v + Q_v L_f - Q_v g(0) g(0)^T Q_v + Q \quad (2.29)$$

$$H^{[3]} = 2x^T Q_v Q_f(x, x) - 2 \sum_{i=1}^m (x^T Q_v L_{g_i})(x^T Q_v g_i(0)) \quad (2.30)$$

$$H^{[4]} = 2x^T Q_v C_f(x, x, x) - \sum_{i=1}^m (x^T Q_v L_{g_i})^2 - 2 \sum_{i=1}^m (x^T Q_v g_i(0))(x^T Q_v Q_{g_i}(x, x)) \quad (2.31)$$

很明顯的，當 $(L_f, g(0))$ 可穩定時， $H(x, V_x^T)$ 的二次項就可以達到如下負定的結果：

Lemma :

若 $(L_f, g(0))$ 可穩定，則存在 $Q_v > 0$ 使得 $H_2 < 0 \Rightarrow$ 存在一原點之鄰域 U 使得當

$x \in U \setminus \{0\}$ 時 $H(x, V_x^T) < 0$

底下我們進一步分析 $(L_f, g(0))$ 不可穩定的情況。

假設 $(L_f, g(0))$ 不可穩定，我們將 $(L_f, g(0))$ 轉換如下型式：

$$L_f = \begin{pmatrix} L_f^{(1)} & 0 \\ 0 & L_f^{(2)} \end{pmatrix} \text{ 且 } g(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ g^{(2)}(0) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

其中 $(L_f^{(2)}, g^{(2)}(0))$ 是可穩定， $L_f^{(1)}$ 只包含虛數軸之特徵根。

令 $Q_v = \text{diag}(Q_v^{(1)}, Q_v^{(2)})$ ， $Q = \text{diag}(Q^{(1)}, Q^{(2)})$

$$\Rightarrow H_2 = \begin{pmatrix} H_2^{(1)} \\ H_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_f^{(1)T} Q_v^{(1)} + Q_v^{(1)} L_f^{(1)} \\ L_f^{(2)T} Q_v^{(2)} + Q_v^{(2)} L_f^{(2)} - Q_v^{(2)} g^{(2)}(0) [g^{(2)}(0)]^T Q_v^{(2)} + Q^{(2)} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

由於 $(L_f^{(2)}, g^{(2)}(0))$ 可穩定，我們可利用如下之演算法則來判斷 H-J 不等式是

否存在半正定解：

Algorithm :

步驟一：給定 $M > 0$ ，解 $H_2^{(2)} + M = 0$ 之解 $Q_v^{(2)}$

步驟二：解 $H_2^{(1)} = 0$ 之解

步驟三：利用前面判斷函數是否負定之結果來判別是否

$$H^{(2)} + H^{(3)} + H^{(4)} < 0$$

底下我們舉一個例子來說明如何應用上述之演算法則來分析 H-J 不等式半正定解的存在性及求得其中一解：

考慮 $L_f^{(1)} = 0 \in \mathfrak{R}$ 且 $(L_f^{(2)}, g^{(2)}(0))$ 可穩定的情況。

定義 $x = (x_1, \eta^T)^T$, $x_1 \in \mathfrak{R}$, $\eta \in \mathfrak{R}^{n-1}$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \eta) \in \mathfrak{R} \\ f_2(x_1, \eta) \in \mathfrak{R}^{n-1} \end{pmatrix}, \quad g_i(x) = \begin{pmatrix} g_{i1}(x_1, \eta) \in \mathfrak{R} \\ g_{i2}(x_1, \eta) \in \mathfrak{R}^{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

由 (2.28) - (2.31) 及 (2.33) - (2.34) 及結果二，我們有如下之定理：

定理四：若 $L_f^{(1)} = 0 \in \mathfrak{R}$ ， $(L_f^{(2)}, g^{(2)}(0))$ 可穩定且

(i) $Q_v^{(1)}, Q_v^{(2)}$ 由前面之 Algorithm 解出

(ii) $f_{1,20} = 0$

(iii) $2Q_v^{(1)} f_{1,11}^T + Q_v^{(2)} f_{2,20} = Q_v^{(1)} \sum_{i=1}^m g_{i1,10}(0) Q_v^{(2)} g_{i2}(0)$

(iv) $2f_{1,30} < Q_v^{(1)} \sum_{i=1}^m g_{i1,10}^2$

則 $V(x) = x^T \text{diag}(Q_v^{(1)}, Q_v^{(2)})x$ 是 H-J 不等式之一解

註：(ii) $\leftrightarrow \rho_{zz} = 0$, (iii) $\leftrightarrow \rho_{yz} = 0$, (iv) $\leftrightarrow \rho_{zzz} < 0$

更進一步，我們有如下之簡化判斷 H-J 不等式存在二次半正定解之定理：

定理五：若 $f_{1,20} = 0$ ， $(L_f^{(2)}, g^{(2)}(0))$ 可穩定且

$$(i) L_f^{(1)} = 0 \in \mathfrak{R}$$

$$(ii) f_{1,11}^T = f_{2,20}^T = \sum_{i=1}^m g_{i,10} Q_v^{(2)} g_{i2}(0) = 0$$

$$(iii) f_{1,30} < 0 \text{ 或 } \sum_{i=1}^m g_{i,10}^2 \neq 0$$

則 $V(x) = x^T \text{diag}(Q_v^{(1)}, Q_v^{(2)})x$ 是 H-J 不等式之一解

2.5 數值求解 H-J 方程式之近似解

由於系統非線性的特性，通常很難去找到一個閉迴路系統的 H-J 方程式的確切解 (exact solution)。為了解決這個問題，Ref. [3] 運用泰勒展開公式提出了利用計算機來逐次求解 H-J 方程式近似解 (approximate solution) 的數值解法。其方法簡述如下：

定義

$$\begin{aligned} H(x, p) &= p^T f(x) - \frac{1}{2} p^T g_2(x) R_2^{-1} g_2(x) p + x^T Q x \\ &= \frac{1}{2} x^T H_{xx} x + p^T H_{px} x + \frac{1}{2} p^T H_{pp} p + H^{[3+]}(x, p) \end{aligned} \quad (2.35)$$

則 H-J 方程式為

$$H(x, p)|_{p=V_x} = V_x^T f - \frac{1}{2} V_x^T g_2 R_2^{-1} g_2 V_x + x^T Q x = 0 \quad (2.36)$$

其中 $H^{[3+]}(x, p)$ 包含 $H(x, p)$ 展開後的三次及三次以上所有項

$$\text{假設 H-J 方程式的解如下：} V(x) = \frac{1}{2} x^T P x + V^{[3+]}(x) \quad (2.37)$$

其中 $V^{[3+]}(x)$ 包含 $V(x)$ 的三次及三次以上所有項，則 P 為下列 algebraic Riccati 方程式的解：

$$\frac{1}{2}x^T H_{xx}x + x^T p H_{px}x + \frac{1}{2}x^T P H_{pp} P x = 0 \quad (2.38)$$

在求得 $V(x)$ 的二次項後，將 $V(x)$ 代入 $H(x, V_x)$ 中並依次數展開，則 $V(x)$ 的三次及高次項可逐次求得，其演算法則如下：

$$\text{二次部份解：} H_{px}^T P + P H_{px} + P H_{pp} P + H_{xx} = 0 \quad (2.39)$$

三次及高次部分可由下式依次求得：

$$V_x^{[3+]}(H_{px} + H_{pp} P)x = -\frac{1}{2}V_x^{[3+]} H_{pp} (V_x^{[3+]})^T - H^{[3+]}(x, V_x) \quad (2.40)$$

理論上，經由上述之演算法則我們可以求出 $V(x)$ 足夠高次的部份。然而，當系統階數足夠高時（如衛星系統為 6 階）計算 $V(x)$ 高次項的困難度將快速增加。如此一來，也增加了利用 H-J 方程式來實現控制器的困難度。由於我們只要找出滿足 H-J 不等式 $H(x, V_x) \leq 0$ 的解，在本計劃中我們將上述二次項部份之 Riccati equation 改成：

$$H_{px}^T P + P H_{px} + P H_{pp} P + H_{xx} = -H_{xx}$$

透過此 Riccati equation 解出之 P 已使 $V(x) = x^T P x$ ，滿足 $H(x, V_x) < 0$ 的特性。因此我們所獲得 H-J 不等式的解是確切解而非近似解。為了改善系統的反應特性，本計劃中我們除了求出控制器之線性部份外，也利用上述演算法則求出可靠度控制器之二次及三次部份。

3 衛星系統可靠度控制之應用分析

3.1 衛星動態方程式之推導

首先考慮一個三個致動器控制的衛星動態系統，在推導衛星動態方程式之前，我們先介紹所須用到的座標軸系統及尤拉角表示法。

3.1.1 座標軸系統

a. 慣性座標系

一般而言，如要表示一質點之物理量時，需考慮該質點所參考的座標軸系統，若座標軸在空間上不會隨時間變化，一般定義為以宇宙恆星星體為指標建立，稱此座標系統為慣性座標系統。

b. 體座標系(參考座標系)

體座標系為以物體本身為一座標系，原點定義在物體的質心上，又稱參考座標系，通常在描述物體運動與慣性座標系統的相對關係。

c. 軌道座標系

軌道座標系以衛星運行軌道本身為一座標系，便於描述衛星於軌道上運行時之各種指向動作，如圖，定義軌道座標系為 $(O1, O2, O3)$ ， $O3$ 為沿著衛星質心與地心連線的方向， $O2$ 為垂直於軌道平面的向量，因此可以根據右手定則，得到 $O1$ 、 $O2$ 與 $O3$ 互相垂直的軌道座標系統。

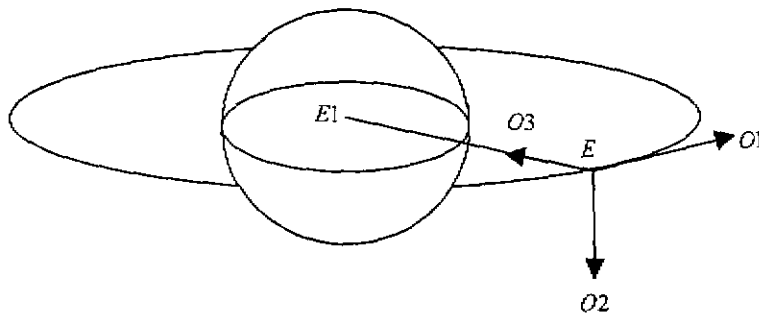


圖 3.1 軌道座標系

d. 尤拉角表示法

考慮慣性座標系連續對一組不平行的軸做旋轉，經由三次旋轉可以得到另一組座標系(體座標系)，此旋轉角度稱之為尤拉角。尤拉角表示法通常利用於自轉的物體，如衛星，以便於推導出附於其上之參考座標系和已知座標系的關係式，然而尤拉角表示法有許多種，依旋轉的順序不同，所導出之結果亦有所不同。一般而言，若 (X, Y, Z) 為慣系座標系， $(b1, b2, b3)$ 為體座標系，假設尤拉角旋轉順序為 1-2-3，則經過三個尤拉角分別旋轉 $\phi \rightarrow \theta \rightarrow \psi$ 後，可得兩座標間的關係為

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = R_{123} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$R_{123} = R(\psi) \cdot R(\theta) \cdot R(\phi) = \begin{pmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$= \begin{pmatrix} c\psi c\theta & s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & s\psi s\phi - c\psi s\theta c\phi \\ -s\psi c\theta & c\psi c\phi - s\psi s\theta s\phi & c\psi s\phi + s\psi s\theta c\phi \\ s\theta & -c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{pmatrix}$$

其中

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{pmatrix}, \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{pmatrix}, \quad R(\psi) = \begin{pmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

c 和 s 代表 cos 和 sin 函數， R_{123} 為兩座標間之轉換矩陣。

3.1.2 衛星動態方程式

根據上述之三種座標系定義及尤拉角表示法，我們將利用這些觀念進行衛星動態模式的推導。

首先考慮下列的方程式，根據角動量守恆定律可得

$$T + G = \frac{dh}{dt} = \left[\frac{dh}{dt} \right]_b + w \times h \quad (3.4)$$

其中

T：外界干擾力矩（包含太陽壓力矩、磁性干擾力矩…等）

G：重力梯度力矩

h：衛星之總角動量

w：衛星主軸之角速度

$[\cdot]_b$ ：相對於衛星本體座標

定義 i, j, k 為衛星本體座標三個方向之單位向量，因此衛星之總角動量

可以表示成

$$h = (I_x w_x + h_{wx})i + (I_y w_y + h_{wy})j + (I_z w_z + h_{wz})k \quad (3.5)$$

I_x, I_y, I_z 為衛星本體分別相對於 x 、 y 及 z 軸之轉動慣量

w_x, w_y, w_z 為衛星本體分別相對於 x 、 y 及 z 軸之角速度

h_{wx}, h_{wy}, h_{wz} 為力矩輪之輸入力矩

將(3.5)式代入(3.4)式可得

$$T + G = \begin{bmatrix} I_x \dot{w}_x + \dot{h}_{wx} + (I_z - I_y)w_y w_z + w_y h_{wz} - w_z h_{wy} \\ I_y \dot{w}_y + \dot{h}_{wy} + (I_x - I_z)w_x w_z + w_x h_{wz} - w_z h_{wx} \\ I_z \dot{w}_z + \dot{h}_{wz} + (I_y - I_x)w_x w_y + w_x h_{wy} - w_y h_{wx} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

接下來推導衛星之角速度，由 ref[]我們可得到衛星角速度和旋轉之尤拉角速度的關係式：

$$w_\alpha = \dot{\theta}_\alpha + w_0 E_2 \cdot e_\alpha, \alpha = 1, 2, 3 \quad (3.7)$$

定義 $\theta_1 = \phi$ 為對 x 軸的旋轉角， $\theta_2 = \theta$ 為對 y 軸的旋轉角， $\theta_3 = \psi$ 為對 z 軸

的旋轉角， E_2 為軌道座標的單位向量， e_α 為衛星主軸座標的單位向量， w_0

定義為軌道速率。

(3.7)式若以向量形式表示可得

$$w = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - w_0 \sin \psi \cos \theta \\ \dot{\theta} + w_0 (\cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \theta \sin \phi) \\ \dot{\psi} + w_0 (\cos \psi \sin \phi + \cos \phi \sin \psi \sin \theta) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

而重力梯度力矩可表示成

$$G = \begin{bmatrix} -3/2 w_0^2 (I_y - I_z) \cos^2 \theta \sin 2\phi \\ 3/2 w_0^2 (I_z - I_x) \sin 2\theta \cos \phi \\ -3/2 w_0^2 (I_x - I_y) \sin 2\theta \sin \phi \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

將方程式(3.8)及(3.9)帶入(3.6)後，便可定義狀態變數如下：

$$x_1 = \phi, x_2 = \dot{\phi}, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta}, x_5 = \psi, x_6 = \dot{\psi},$$

我們可將衛星的動態模型以狀態方程式方式描述如 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$

令 $x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6)^T$, 則衛星系統的六個狀態微分可表示為

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = f_2, \dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = f_4, \dot{x}_5 = x_6, \dot{x}_6 = f_6$$

則 f_2, f_4, f_6 可表示如下：

$$\begin{aligned} f_2 &= w_0 x_6 c x_5 c x_3 - w_0 x_4 s x_5 s x_3 + (I_y - I_z)[x_4 x_6 + w_0 x_4 c x_1 s x_5 s x_3 + w_0 x_4 c x_5 s x_1 + w_0 x_6 c x_5 c x_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} w_0^2 s(2x_5) c^2 x_1 s x_1 + \frac{1}{2} w_0^2 c^2 x_5 s(2x_1) - w_0 x_6 s x_5 s x_3 s x_1 - \frac{1}{2} w_0^2 s^2 x_3 s^2 x_5 s(2x_1) - \frac{1}{2} w_0^2 s \\ &\quad (2x_5) s x_3 s^2 x_1 - \frac{3}{2} w_0^2 c^2 x_3 s(2x_1)] - \dot{h}_{wx} - h_{wz}(x_4 + w_0 c x_5 c x_1 - w_0 s x_5 s x_3 s x_1) + \dot{h}_{wx}(x_6 + w_0 \\ &\quad c x_1 s x_5 s x_3 + w_0 c x_5 s x_1) \\ f_4 &= w_0 x_6 s x_5 c x_1 - w_0 x_2 c x_5 s x_1 + w_0 x_6 c x_5 s x_3 s x_1 + w_0 x_4 s x_5 c x_1 s x_1 + w_0 x_2 s x_5 s x_3 c x_1 + (I_z - I_x) \\ &\quad x_2 x_6 + w_0 x_2 c x_1 s x_5 s x_3 + w_0 x_2 c x_5 s x_1 - w_0 x_6 c x_5 c x_3 - \frac{1}{2} w_0^2 s(2x_3) s^2 x_3 c x_1 - \frac{1}{2} w_0^2 c x_3 s x_1 \\ &\quad s(2x_5) + \frac{3}{2} w_0^2 s(2x_3) c x_1] - \dot{h}_{wy} - \dot{h}_{wx}(x_6 + w_0 c x_1 s x_5 s x_3 + w_0 c x_5 s x_1) + \dot{h}_{wz}(x_2 - w_0 s x_5 c x_3) \\ f_6 &= w_0 x_2 s x_1 s x_5 s x_3 - w_0 x_6 c x_1 c x_5 s x_3 - w_0 x_4 c x_1 s x_5 c x_3 + w_0 x_6 s x_5 s x_1 - w_0 x_2 c x_5 c x_1 + \\ &\quad (I_x - I_y)[x_2 x_4 + w_0 x_2 c x_5 c x_1 - w_0 x_2 s x_5 s x_3 s x_1 - w_0 x_4 s x_5 c x_3 - \frac{1}{2} w_0^2 s(2x_5) c x_3 c x_1 + \\ &\quad \frac{1}{2} w_0^2 s^2 x_5 s x_1 s(2x_3) - \frac{3}{2} w_0^2 s(2x_3) s x_1] - \dot{h}_{wz} - \dot{h}_{wy}(x_2 - w_0 s x_5 c x_3) - \dot{h}_{wx}(x_4 + w_0 c x_5 \\ &\quad c x_1 - w_0 s x_5 s x_3 s x_1) \end{aligned} \tag{3.10}$$

其中 c 和 s 代表 \cos 和 \sin 函數

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

上述之非線性衛星動態模式為針對三個致動器控制之衛星本體進行推導之動態模式，但由於中華衛星二號為利用四軸來控制 x, y, z 三軸上的變化，其目的為如有其中一軸故障或毀壞時，仍可用另外三軸控制力所構成的分量來控制旋轉。

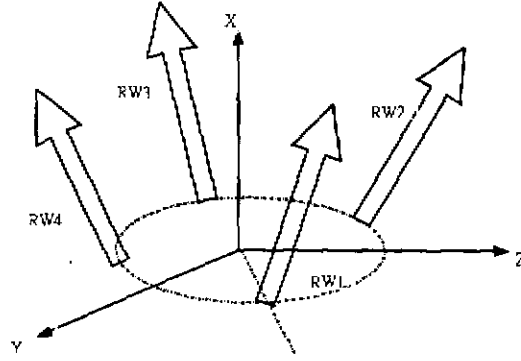


圖 3.2 衛星本體示意圖

為了讓控制力能在三軸及四軸之間轉換，因此藉由衛星本體示意圖我們可算出四軸控制力和原本三軸控制力的轉換矩陣(定義為 S)：

$$S = \begin{pmatrix} 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 \\ 0.69 & -0.69 & -0.69 & 0.69 \\ 0.28 & 0.28 & -0.28 & -0.28 \end{pmatrix}_{3 \times 4} \quad (3.12)$$

因此，我們可得到轉換後之衛星之動態方程式，改寫如

$$\dot{x} = f(x) + g'(x)u' \quad (3.13)$$

之形式，其中 $f(x)$ 和方程式(3.10)的 $f(x)$ 相同，而 $g'(x)$ 及 u' 為

$$g'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{0.67}{I_x} & \frac{0.67}{I_x} & \frac{0.67}{I_x} & \frac{0.67}{I_x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{0.69}{I_y} & \frac{-0.69}{I_y} & \frac{-0.69}{I_y} & \frac{0.69}{I_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{0.28}{I_z} & \frac{0.28}{I_z} & \frac{-0.28}{I_z} & \frac{-0.28}{I_z} \end{pmatrix}, \quad u' = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

其中 u_1 、 u_2 、 u_3 及 u_4 個別為中華衛星二號四個方向的控制力矩。

3.2 衛星系統之可控性分析

分析系統可控性的目的在於確定系統沒有不可控的不穩定特徵根存在，如果系統可控，則可藉由回授的方法將所有根移至想要的位置。而假使系統為不可控，但不穩定的根為可控，則稱為可穩定(穩定點為不可控)。
可控性定義：

考慮一線性系統 $\dot{x} = Ax + Bu$ ， $A \in R^{n \times n}$ $x \in R^n$ $B \in R^{n \times m}$ $u \in R^m$ ，

$$\text{可控性矩陣為 } C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

如果 $\text{Rank}(C) = n$ ，則稱系統可控。

接下來我們將對系統做線性化，首先考慮衛星之非線性狀態方程式

$$\dot{x} = f(x) + g'(x)u' \quad (3.16)$$

假設系統平衡點為 $X_e = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ ，則在平衡點附近做線性化之後可得線性系統為

$$\dot{\zeta} = A\zeta + Bu \quad (3.17)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_2 & 0 & 0 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.69 & -0.69 & -0.69 & 0.69 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.28 & 0.28 & -0.28 & -0.28 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

其中 $\zeta = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$ ， $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ ， $a_1 = \frac{w_0^2(I_y - I_x)}{I_z}$ ， $a_2 = \frac{w_0 I_y}{I_x}$

經計算後可求出 A 矩陣的特徵方程式如下：

$$\lambda^2 \cdot [\lambda^4 + (a_1 + a_2^2)\lambda^2 - 2a_1^2] = 0$$

因此，A 的特徵值為

$$\{0, 0, \pm\mu_1, \pm j\mu_2\}$$

其中

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{(a_1 + a_2^2)^2 + 8a_1^2} - (a_1 + a_2^2)}{2}}, \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{(a_1 + a_2^2)^2 + 8a_1^2} + (a_1 + a_2^2)}{2}}$$

因為 μ_1 及 μ_2 均大於零，所以可以很明顯地看出此系統在未加控制前為不穩定的系統（五個不穩定的根）。

底下我們將就衛星系統（ $\dot{\zeta} = A\zeta + Bu$ ）進行線行可控性之分析：

首先，我們選取如下之參數：

$$w_0 = 1.0312 \times 10^{-3}$$

$$I_x = I_z = 2000$$

$$I_y = 400$$

即系統的轉動慣量對稱於 y 軸。在此設定下，

$$a_1 = \frac{w_0^2(I_y - I_x)}{I_z} = -8.507 \times 10^{-7}$$

$$a_2 = \frac{w_0 I_y}{I_x} = 2.6024 \times 10^{-4}$$

其次，我們定義不同故障狀況下之符號如下：

B : 正常情況

B_i : 第 i 個致動器失效，i=1, 2, 3, 4

B_{ij} : 第 i 及第 j 個致動器同時失效，i, j=1, 2, 3, 4

B_f : 操作當時之系統致動器狀況。B_f 可以是 B, B_i 及 B_{ij} 等狀況。

在這些設定下，可控性矩陣為

$$C = [B_f \quad AB_f \quad \dots A^5 B_f] \quad (3.19)$$

底下列出不同故障狀況下之可控性矩陣（我們只列出前六個線性獨立的行）

當 $B_f=B$ 時，

$$C_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.67 & 0.67 \\ 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 5.8 \times 10^{-5} & 5.8 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.69 & -0.69 \\ 0.69 & -0.69 & -0.69 & 0.69 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.28 & 0.28 \\ 0.28 & 0.28 & -0.28 & -0.28 & -1.4 \times 10^{-4} & -1.4 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

當 $B_f=B2$ 時，

$$C_{B2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.67 & 0.67 & 0.67 \\ 0.67 & 0.67 & 0.67 & 5.8 \times 10^{-5} & -5.8 \times 10^{-5} & -5.8 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0.69 & -0.69 & 0.69 \\ 0.69 & -0.69 & 0.69 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.28 & -0.28 & -0.28 \\ 0.28 & -0.28 & -0.28 & -1.4 \times 10^{-4} & -1.4 \times 10^{-4} & -1.4 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

當 $B_f=B3$ 時，

$$C_{B3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.67 & 0.67 & 0.67 \\ 0.67 & 0.67 & 0.67 & 5.77 \times 10^{-5} & 5.77 \times 10^{-5} & -5.77 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0.69 & -0.69 & 0.69 \\ 0.69 & -0.69 & 0.69 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.28 & 0.28 & -0.28 \\ 0.28 & 0.28 & -0.28 & -1.38 \times 10^{-4} & -1.38 \times 10^{-4} & -1.3818 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

當 $B_f=B_4$ 時，

$$C_{B_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.67 & 0.67 & 0.67 \\ 0.67 & 0.67 & 0.67 & 5.77 \times 10^{-5} & 5.77 \times 10^{-5} & -5.77 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0.69 & -0.69 & -0.69 \\ 0.69 & -0.69 & -0.69 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.28 & 0.28 & -0.28 \\ 0.28 & 0.28 & -0.28 & -1.38 \times 10^{-4} & -1.38 \times 10^{-4} & -1.38 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

當 $B_f=B_{12}$ 時，

$$C_{B_{12}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.67 & 0.67 & -5.8 \times 10^{-5} & 1.1 \times 10^{-6} \\ 0.67 & 0.67 & -5.8 \times 10^{-5} & -5.8 \times 10^{-5} & 1.1 \times 10^{-6} & -4.6 \times 10^{-11} \\ 0 & 0 & -0.69 & 0.69 & 0 & 0 \\ -0.69 & 0.69 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.28 & -0.28 & -1.4 \times 10^{-4} & 2.5 \times 10^{-7} \\ -0.28 & -0.28 & -1.4 \times 10^{-4} & -1.4 \times 10^{-4} & 2.5 \times 10^{-7} & -1.1 \times 10^{-10} \end{bmatrix}$$

當 $B_f=B_{23}$ 時，

$$C_{B_{23}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.67 & 0.67 & 5.77 \times 10^{-5} & -5.77 \times 10^{-5} \\ 0.67 & 0.67 & 5.77 \times 10^{-5} & -5.77 \times 10^{-5} & 1.11 \times 10^{-6} & 1.11 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0.69 & 0.69 & 0 & 0 \\ 0.69 & 0.69 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.28 & -0.28 & -1.38 \times 10^{-4} & -1.38 \times 10^{-4} \\ 0.28 & -0.28 & -1.38 \times 10^{-4} & -1.38 \times 10^{-4} & -2.50 \times 10^{-7} & 2.50 \times 10^{-7} \end{bmatrix}$$

經簡單的計算後，上列的可控性矩陣之秩

$$\text{rank}(C_B) = \text{rank}(C_{B_2}) = \text{rank}(C_{B_3}) = \text{rank}(C_{B_4}) = \text{rank}(C_{B_{12}}) = \text{rank}(C_{B_{23}}) = 6$$

皆為滿秩(full rank)。即表示此系統在上述狀況下都可由控制器穩定下來。然而，當有二軸失效時，可控性矩陣接近不可逆(singular matrix)，這種情況反應了系統雖然可控但受控情況卻相當微弱，也就是表示系統有某些模式(mode)已非常接近不可控的程度。

4 數值模擬結果與討論

本章節將針對四軸控制之衛星非線性動態模式 $\dot{x} = f(x) + g'(x)u'$ 進行可靠度控制器之模擬。這些模擬是利用 MATLAB 及 SIMNON 兩種套裝軟體完成的。這些模擬結果包含以下三種情況：

情況 1：針對 B 設計可靠度控制器（全部控制器皆沒損壞）

情況 2：針對 B2 設計可靠度控制器（第二個控制器故障）

情況 3：針對 B12 設計可靠度控制器（第一、二個控制器故障）

同時每種不同情況也使用不同階數之控制器（包括線性、線性+二階及線性+二階+三階三種）。最後，我們將模擬結果整理成表格來比較各種性能表現（包括穩定性、收斂時間、二次指標性能、花費之能量、所需之瞬間最大控制值及不同增益下系統性能之分析與比較）。

4.1 參數設定

在此模擬中，我們採用如下之數據：

衛星本體轉動慣量： $I_x = I_z = 2000$ ， $I_y = 400$ （即衛星本體對稱於 y 軸）

軌道速率： $w_0 = 1.0312 \times 10^{-3}$

初始值選定： $x(0) = (-0.7 \quad -0.07 \quad 1.5 \quad 0.3 \quad 1.3 \quad -0.2)^T$

此外，我們採用底下之符號來表示所使用之控制器之階數：

1st : 一階控制器

2nd : 一階+二階控制器

3rd : 一階+二階+三階控制器

4.2 模擬結果與討論

模擬結果列於圖 4.1-4.32，由這些模擬結果可以看出來，當系統正常或只有一軸故障時，系統都可以輕易的達到穩定的結果。但當有二軸同時發生故障時，系統所需之穩定時間相對的增加許多。同時系統也可能因小小的擾動導致不穩定，如圖 4.31-4.32 所示。此外，系統之穩定性及性能表現整理於表 4.1-4.4 這些結果我們說明如下：

a. 在穩定性方面我們可以很清楚地看出，無論是針對 B、B1、B2、B3 或 B4 狀況下設計控制器，對系統全無損壞 (B) 或有一個損壞 (B1、B2、B3 或 B4) 時，系統都是穩定的。

b. 在二次性能指標 ($\int(x^T Qx + u^T Ru)dt$) 及達到穩定所需的能量 ($\int(u^T Ru)dt$) 方面，針對 B 設計對 B 控制的性能，相較之下，比對 B1、B2、B3、B4 控制的性能來的好，同樣的，針對 B2 設計對 B2 控制的性能，比對 B、B1、B3、B4 控制的性能佳，表 4.1-4.3 中也顯示了針對各種不同情況下設計之控制器對系統控制時的二次性能指標之最大上限 $V(x_0)$ ， x_0 是起始狀態。很明顯的，無論是針對任何狀況設計控制器，二次性能指標都會小於其相對應的最大上限，這與所獲得的理論結果相符。另外值得一提的是在與上述相同的狀況下，因為二階及三階控制器利用非線性的部分來補償線性控制部分的不足，因此，可以觀察出利用三階的控制器控

制的二次性能指標會比二階來的好，而二階又會比一階好。

- c. 在收斂時間方面，一般而言，若系統條件（設計所依據之系統及系統操作時之狀況相同時）我們大致可以得到此關係：

$$t_s(1st) < t_s(2nd) < t_s(3rd) \quad t_s : \text{收斂時間}$$

也就是說，一階控制器所花的時間最短而三階控制器則相對花費最長時間，例如由表 4.1 我們可看出針對 B（正常情況）做設計並針對正常情況 B 做控制時，使用一階控制器收斂時間約是 8.78 秒，使用二階控制器約 8.9 秒，使用三階控制器約 8.98 秒，然而，針對 B2（第二個致動器失效）做設計並針對第二個致動器失效做控制時，使用一階控制器收斂時間約是 8.87 秒，使用二階控制器約 9.41 秒，使用三階控制器約 9.72 秒。由模擬圖可以看出使用的控制器階數愈多雖然 settling time 較長，但二次性能指標 $\int (x^T Qx + u^T Ru) dt$ 相對會較小，且所需要的最大控制輸出 $\|u\|_{\infty}$ 也會較小。這與我們所設定的最佳化策略 $\min \int (x^T Qx + u^T Ru) dt$ 相符。

- d. 在致動器發生異常的狀況下，其輸出的力矩可能較希望的輸出值更大或更小。表 4.4 顯示在不同之致動器輸出增益值對指標之比較。在表中 2 表示實際輸出增益之 2 倍。同理，1、0.5 及 0 各代表正常狀況，實際輸出為希望值之一半及故障狀況。在針對 B2 設計控制器的時候，可以很明顯的看出無論實際之輸出增益為希望值之 2 倍、1 倍、0.5 倍或 0 倍時，系統都還處於穩定狀態且其所對應的二次性能指標都會小於其二次性能指標之上限 $V(x_0)$ （如表 4.4），這些結果也都與理論推導之結果相符。
- e. 考慮兩個致動器故障的情況，圖 4.31 及 4.32 均為針對 B12 設計可靠度控制器對 B12 失效狀況模擬，但結果卻截然不同。我們可以很明顯地由圖 4.31 看出系統狀態約在 10000 秒左右才收斂到零，而圖 4.32 則顯示系統狀態發散的事實。探討造成這些現象的原因，我們透過上一節的可

控性分析後可以發現，雖然針對 B12 設計控制器時系統為可控，但其可控性矩陣 C_{B12} 的第五及第六行的值非常接近於零這表示有些 modes 幾乎不可控，再觀察系統之特徵值為

$$\lambda(A_c) = \{-1.12 \pm 0.45i, -1.08 \pm 0.46i, -0.0005 \pm 0.0009i\}$$

很明顯的，閉迴路之線性化系統有一對特徵根很接近虛軸，也就是說閉迴路系統有近乎臨界系統 (Critical System) 的特性。因此，欲使系統到穩定的位置需要花相當大的控制力量和時間。此外，此兩圖截然不同的動態特性源自於起始狀態值的不同。圖 4.31 的初始值 $x(0) = (0.001 \ 0 \ 0.003 \ -0.002 \ 0.001 \ 0)^T$ 造成系統狀態收斂至操作點，而圖 4.32 的初始值 $x(0) = (0.01 \ 0 \ 0.03 \ -0.02 \ 0.01 \ 0)^T$ 則造成系統狀態發散的現象。由此可見二軸致動器故障時將導致操作點之 domain of attraction 相當小，也就是說系統只要受到外界些許的擾動，就可能導致系統狀態發散。

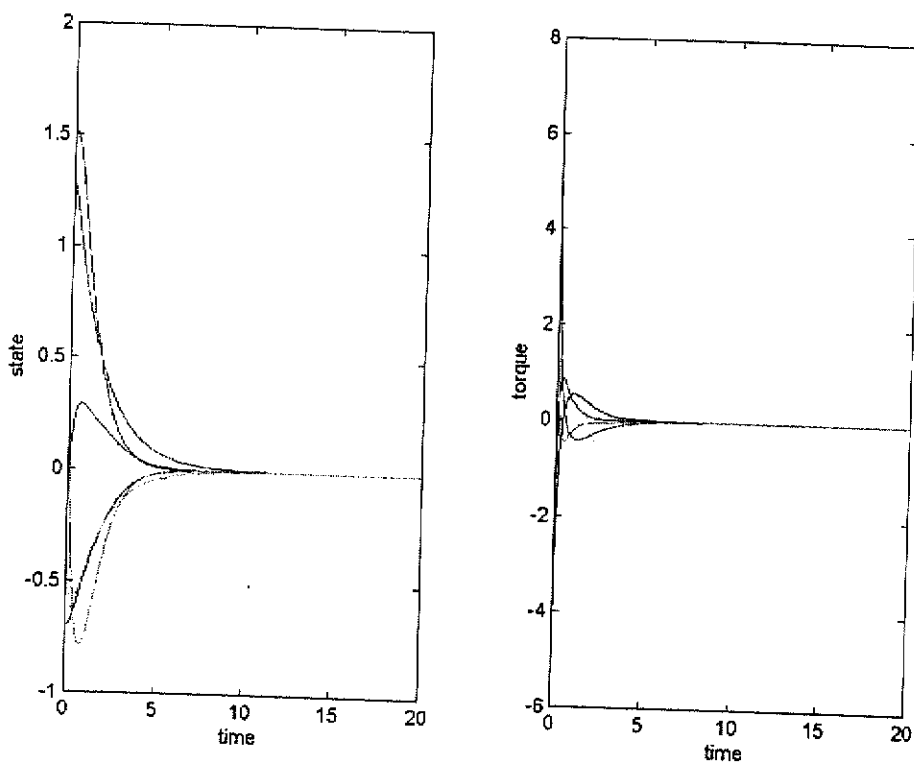


圖 4.1 針對 B 設計控制器對 B 狀況控制(1st)

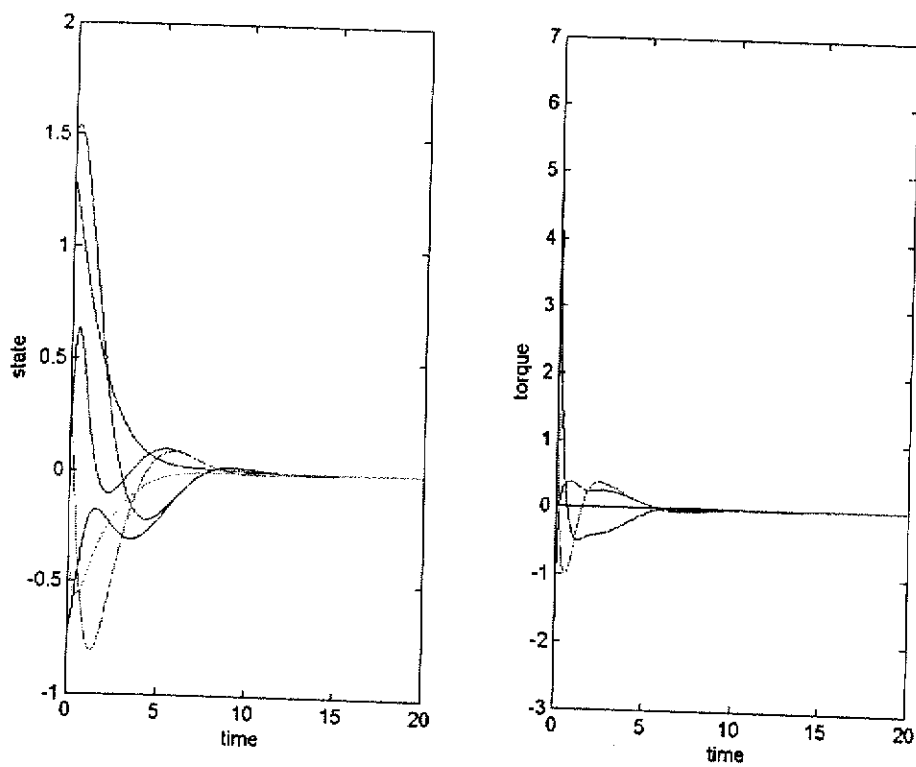


圖 4.2 針對 B 設計控制器對 B1 狀況控制(1st)

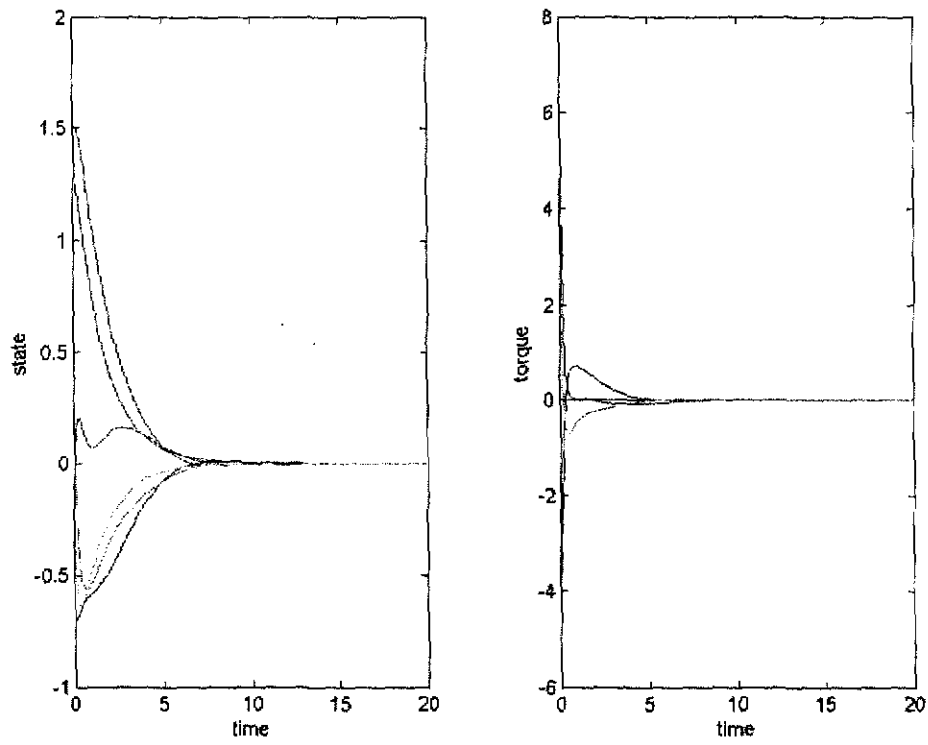


圖 4.3 針對 B 設計控制器對 B2 狀況控制(1st)

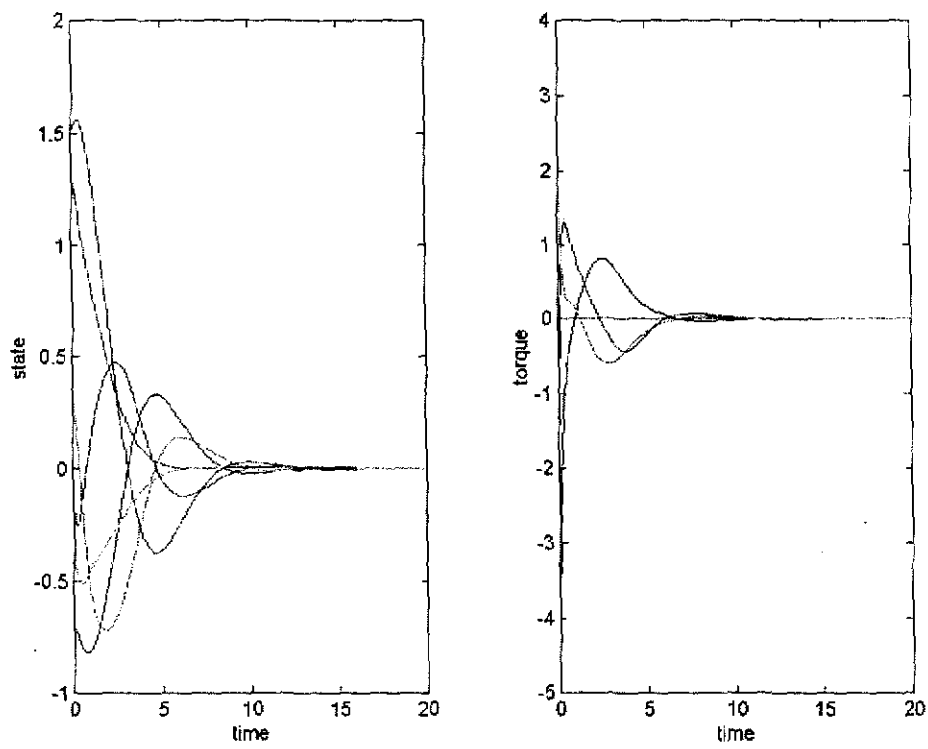


圖 4.4 針對 B 設計控制器對 B3 狀況控制(1st)

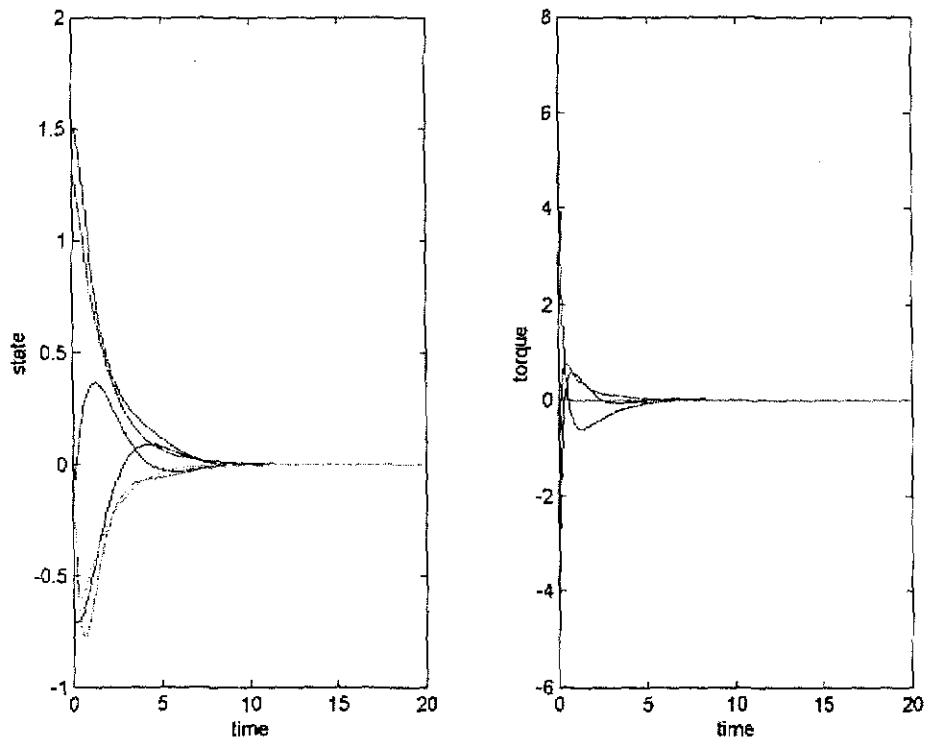


圖 4.5 針對 B 設計控制器對 B4 狀況控制(1st)

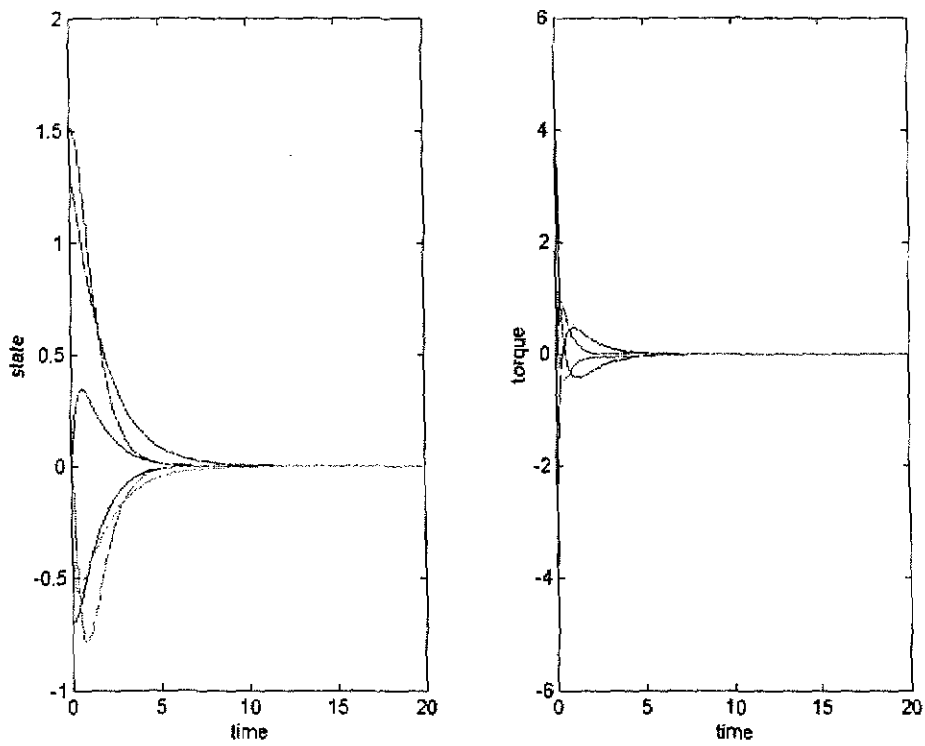


圖 4.6 針對 B 設計控制器對 B 狀況控制(2nd)

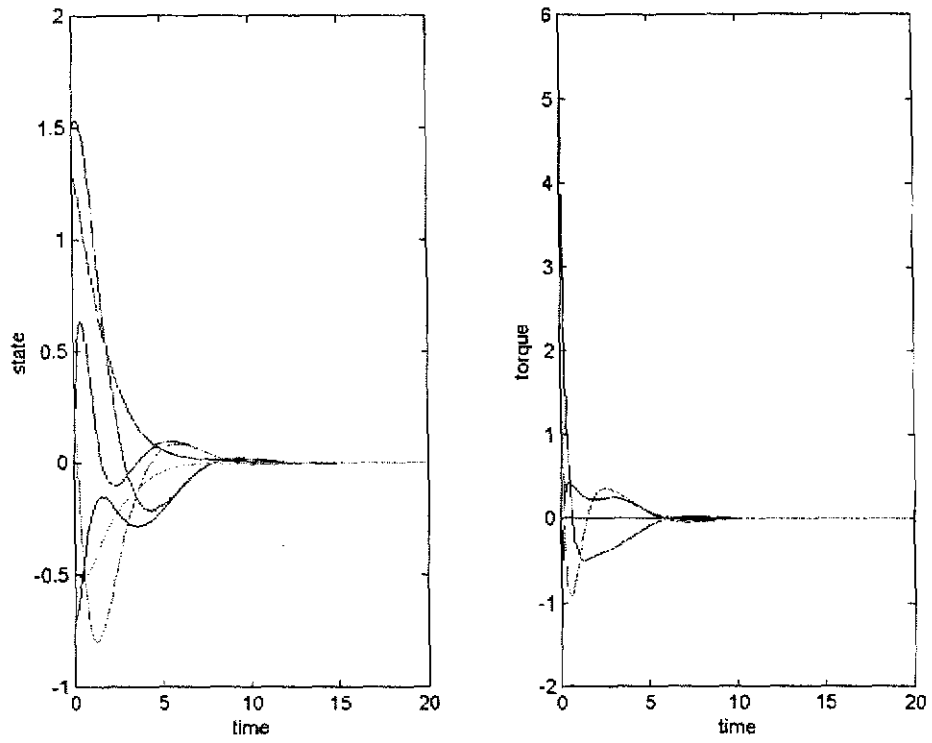


圖 4.7 針對 B 設計控制器對 B1 狀況控制(2nd)

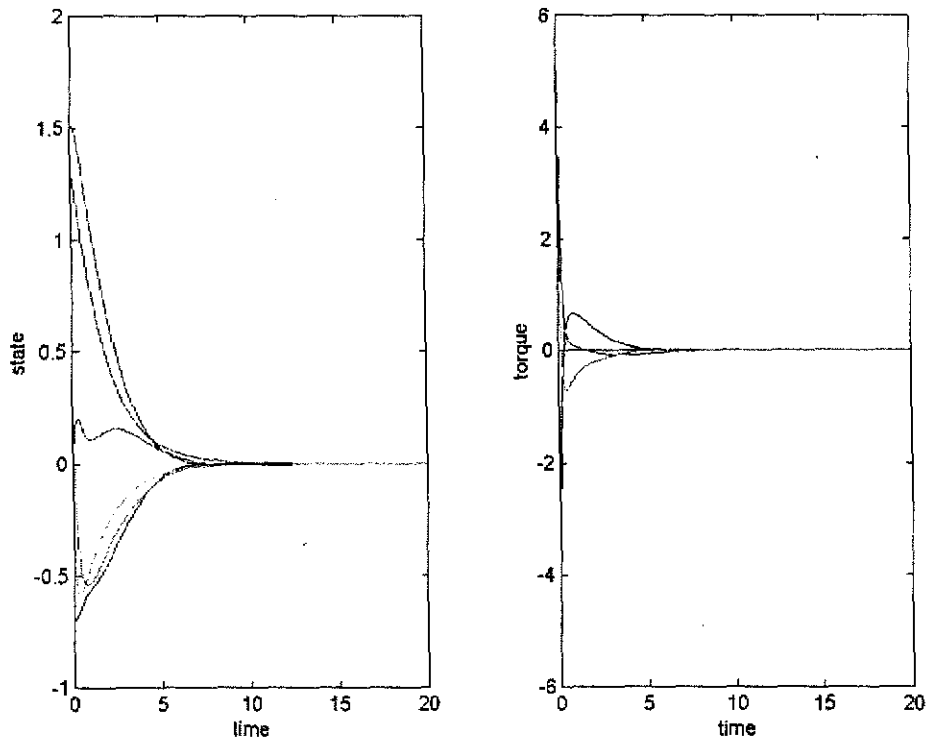


圖 4.8 針對 B 設計控制器對 B2 狀況控制(2nd)

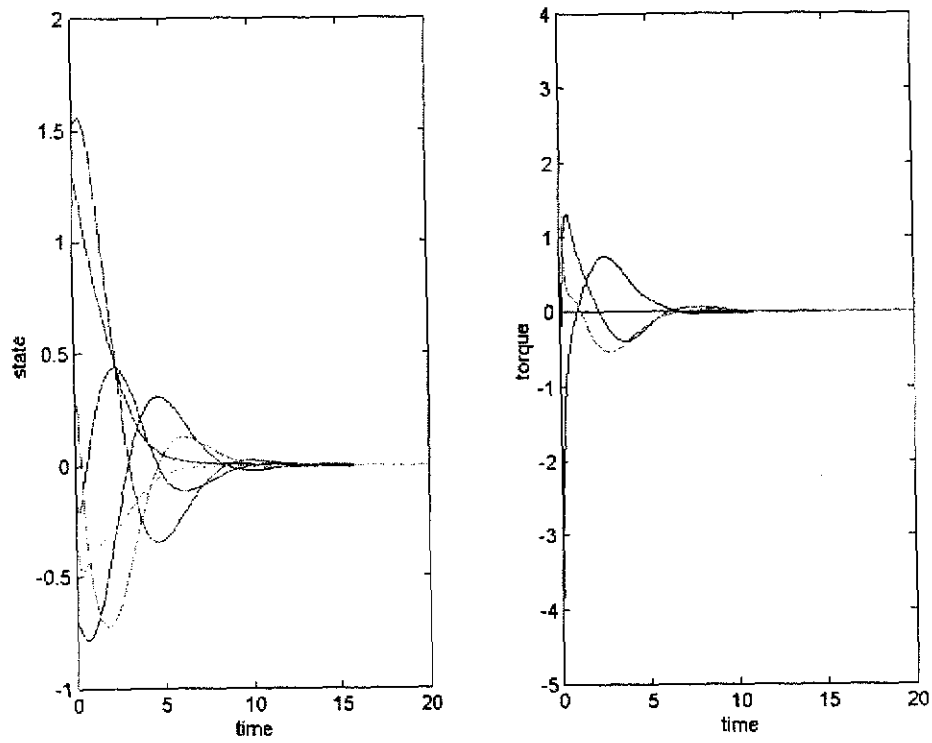


圖 4.9 針對 B 設計控制器對 B3 狀況控制(2nd)

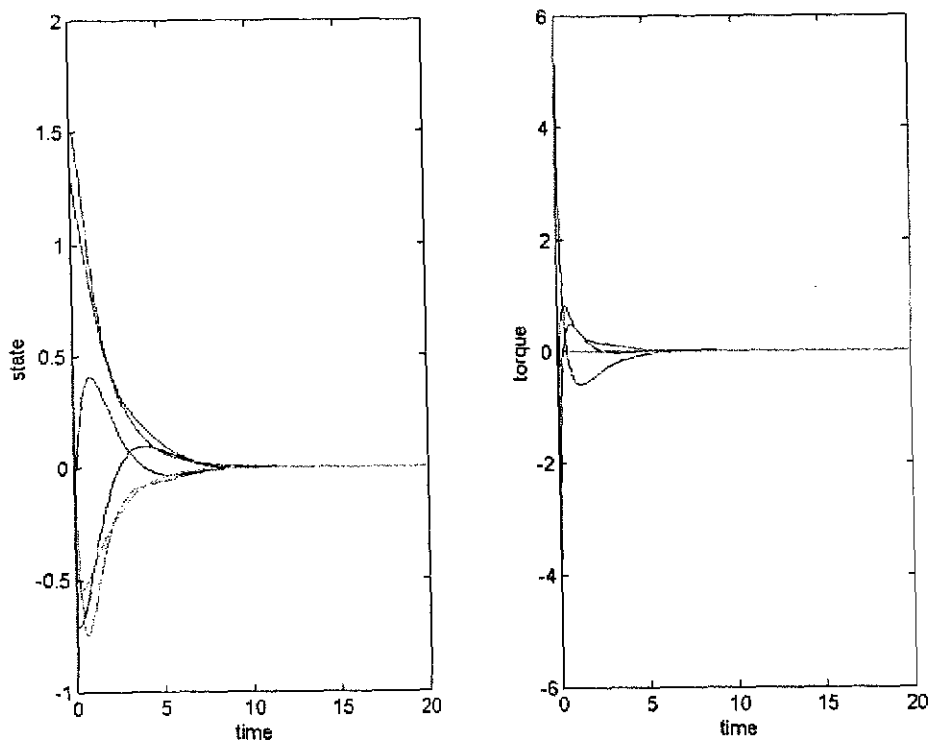


圖 4.10 針對 B 設計控制器對 B4 狀況控制(2nd)

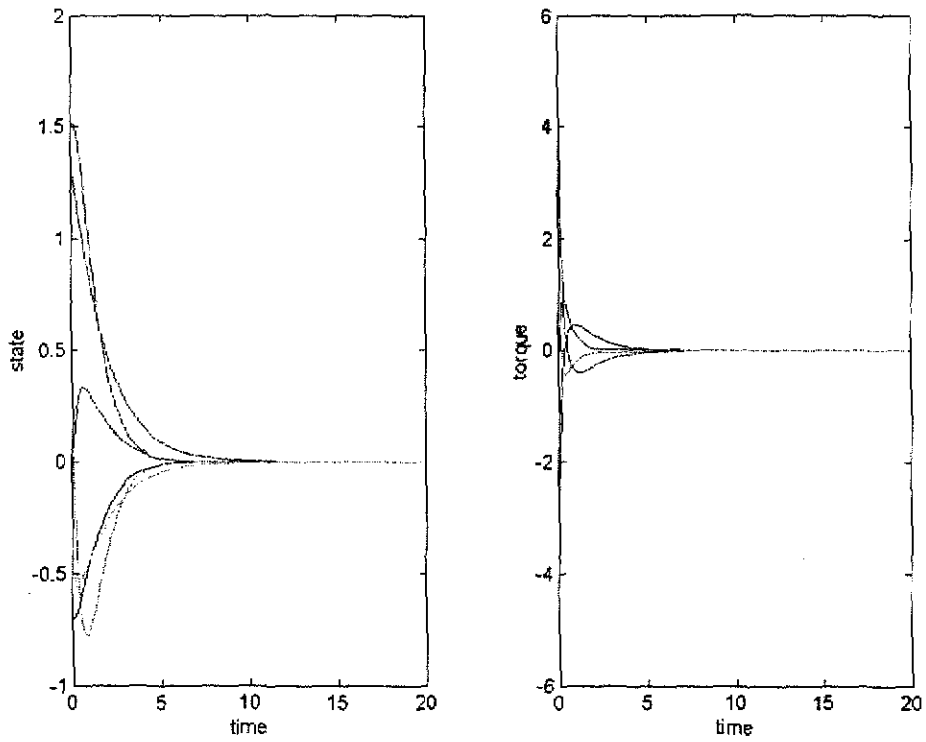


圖 4.11 針對 B 設計控制器對 B 狀況控制(3rd)

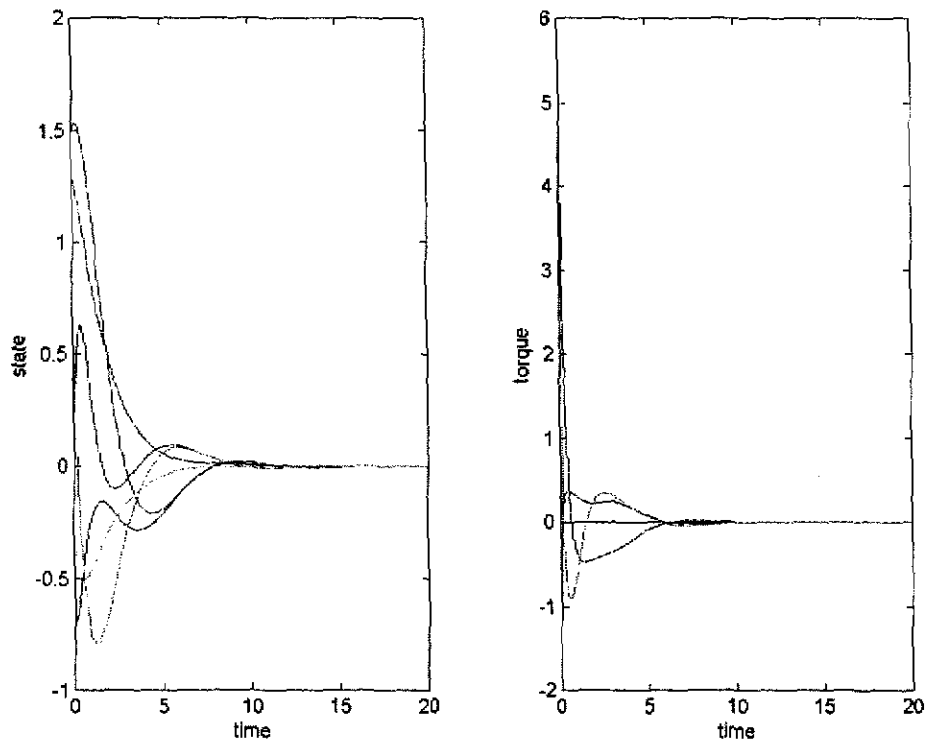


圖 4.12 針對 B 設計控制器對 B1 狀況控制(3rd)

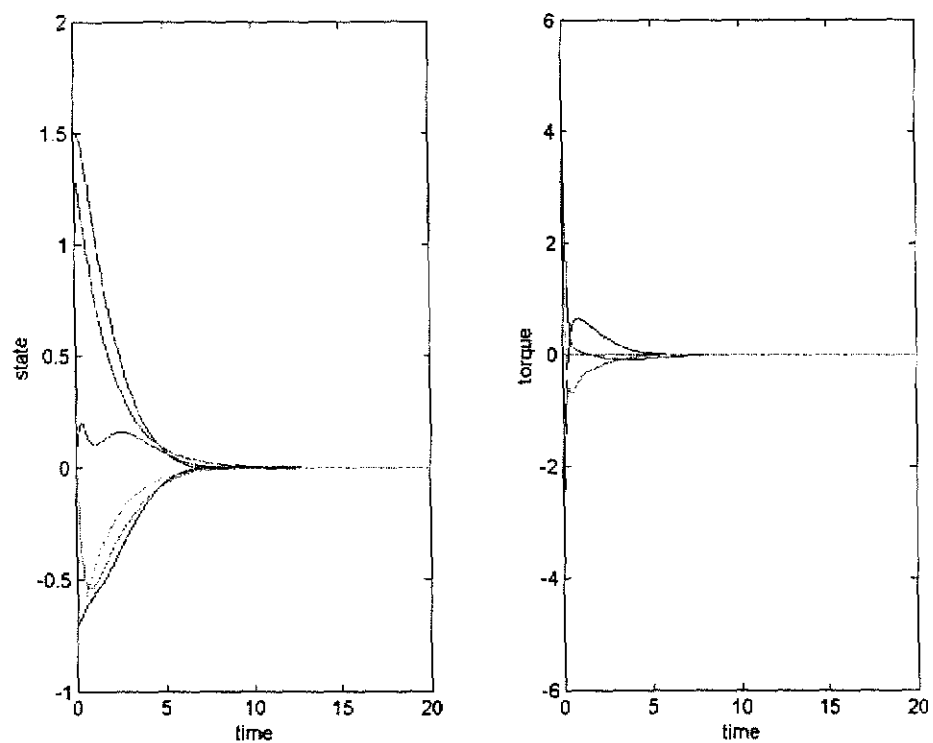


圖 4.13 針對 B 設計控制器對 B2 狀況控制(3rd)

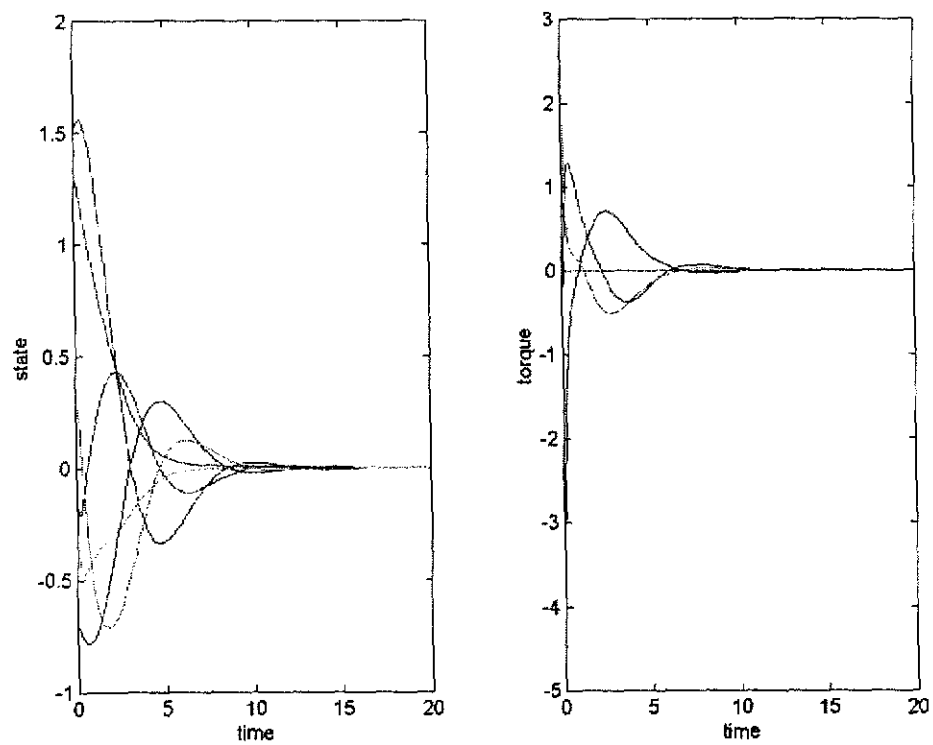


圖 4.14 針對 B 設計控制器對 B3 狀況控制(3rd)

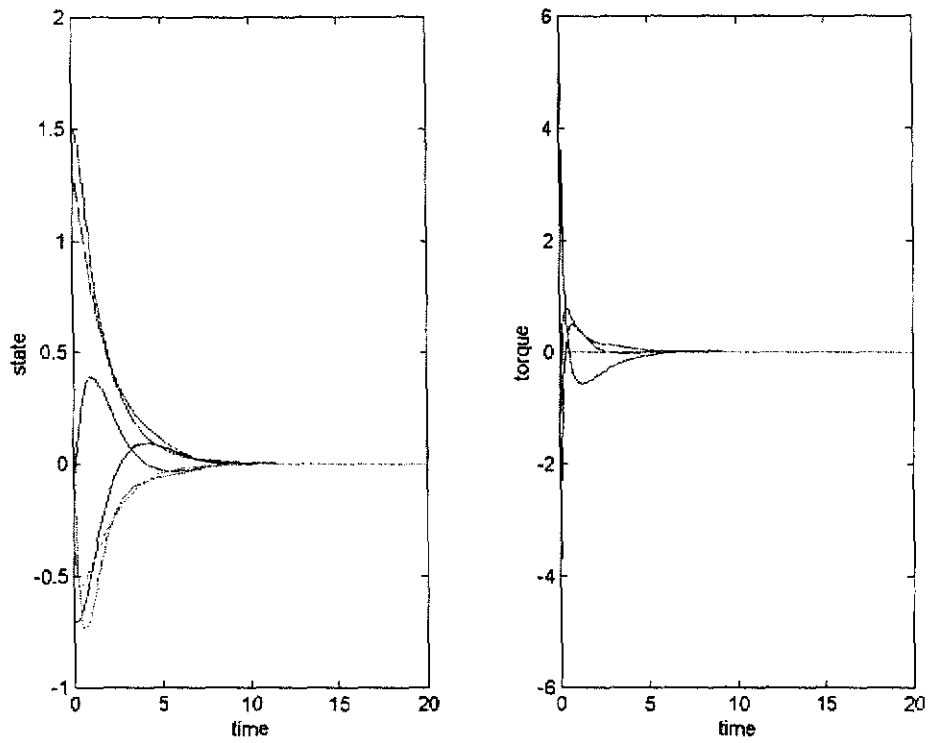


圖 4.15 針對 B 設計控制器對 B4 狀況控制(3rd)

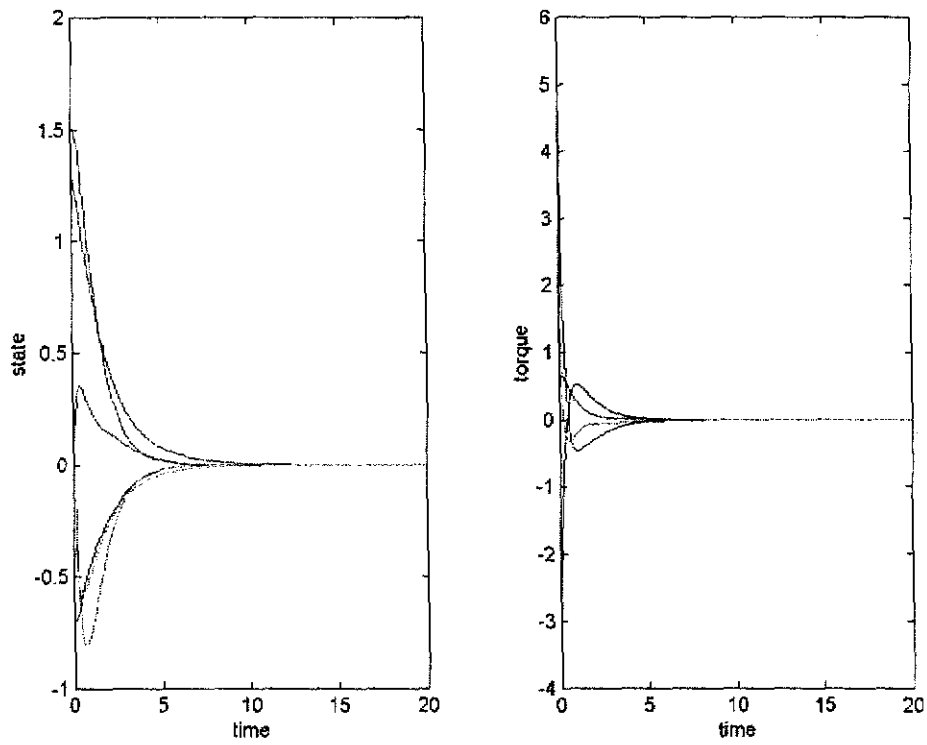


圖 4.16 針對 B2 設計控制器對 B 狀況控制(1st)

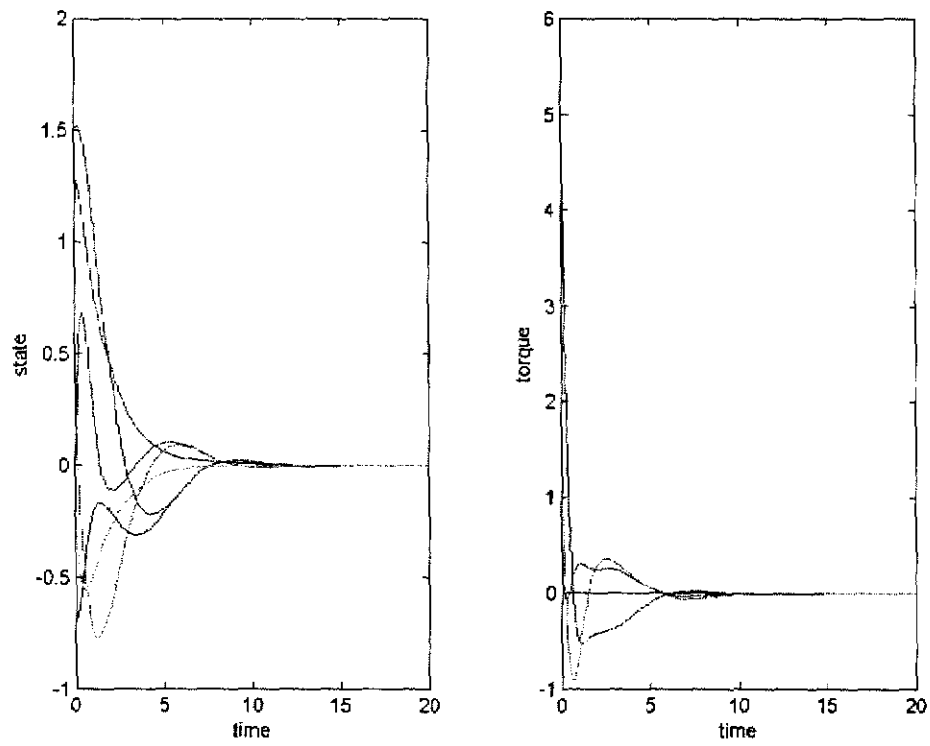


圖 4.17 針對 B2 設計控制器對 B1 狀況控制(1st)

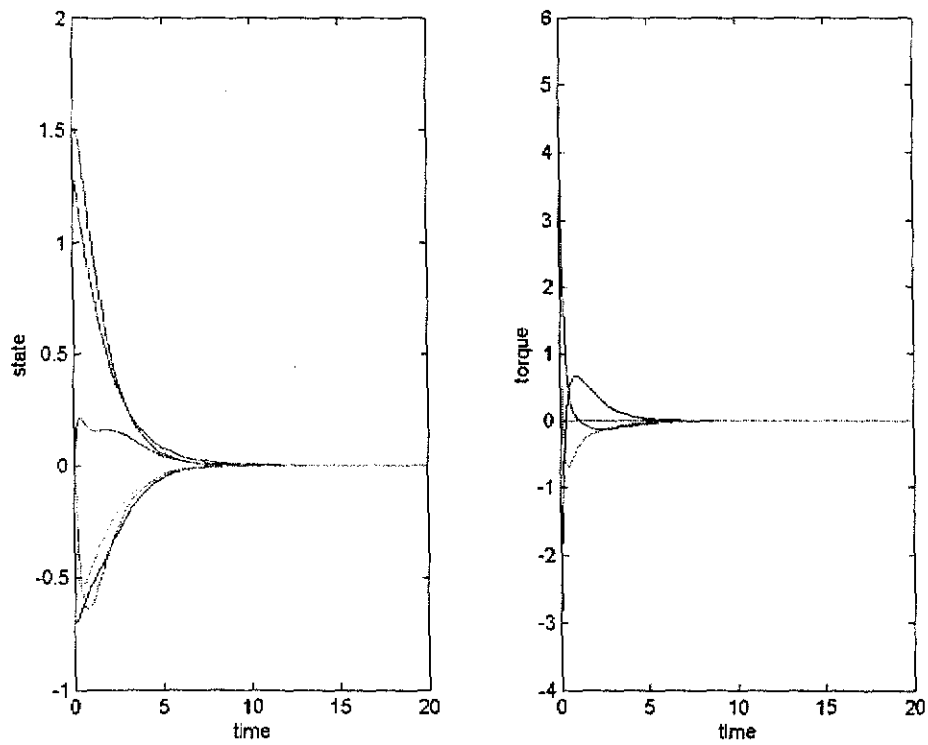


圖 4.18 針對 B2 設計控制器對 B2 狀況控制(1st)

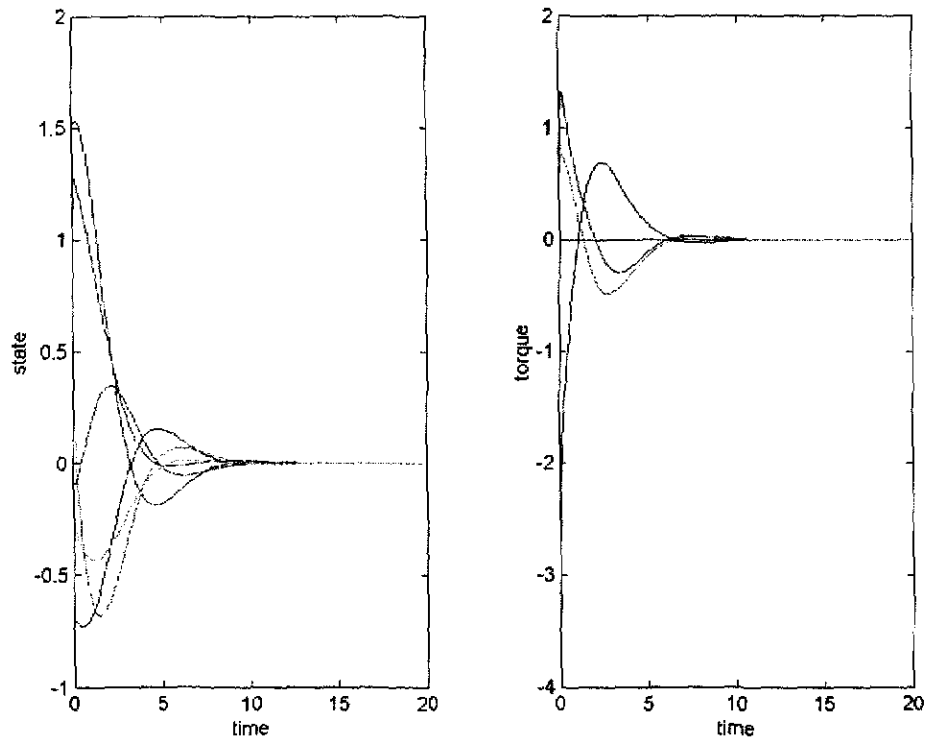


圖 4.19 針對 B2 設計控制器對 B3 狀況控制(1st)

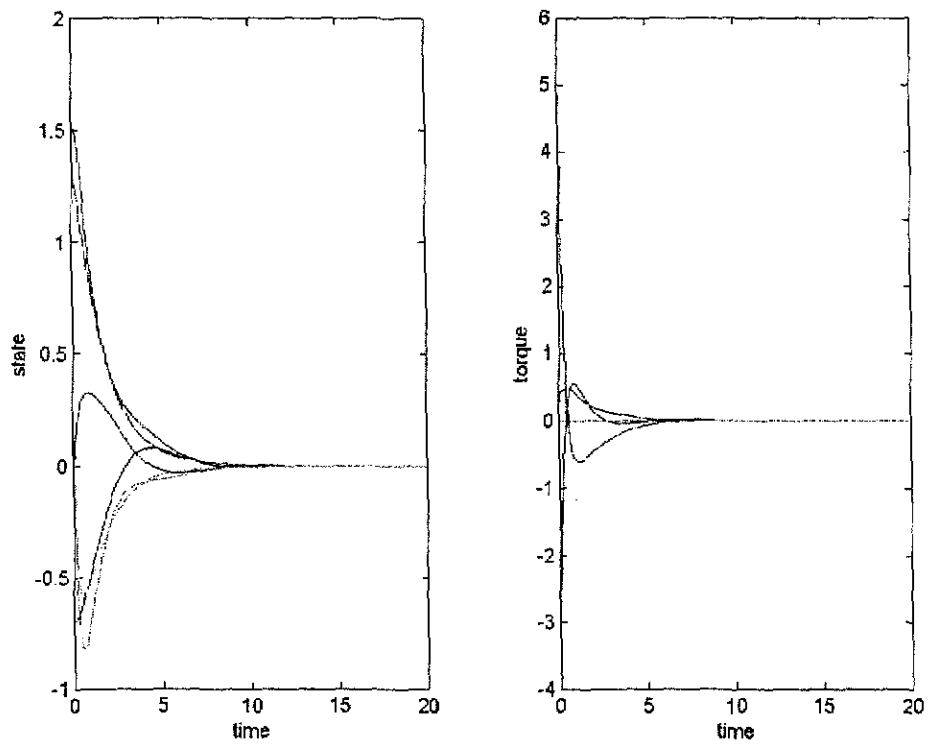


圖 4.20 針對 B2 設計控制器對 B4 狀況控制(1st)

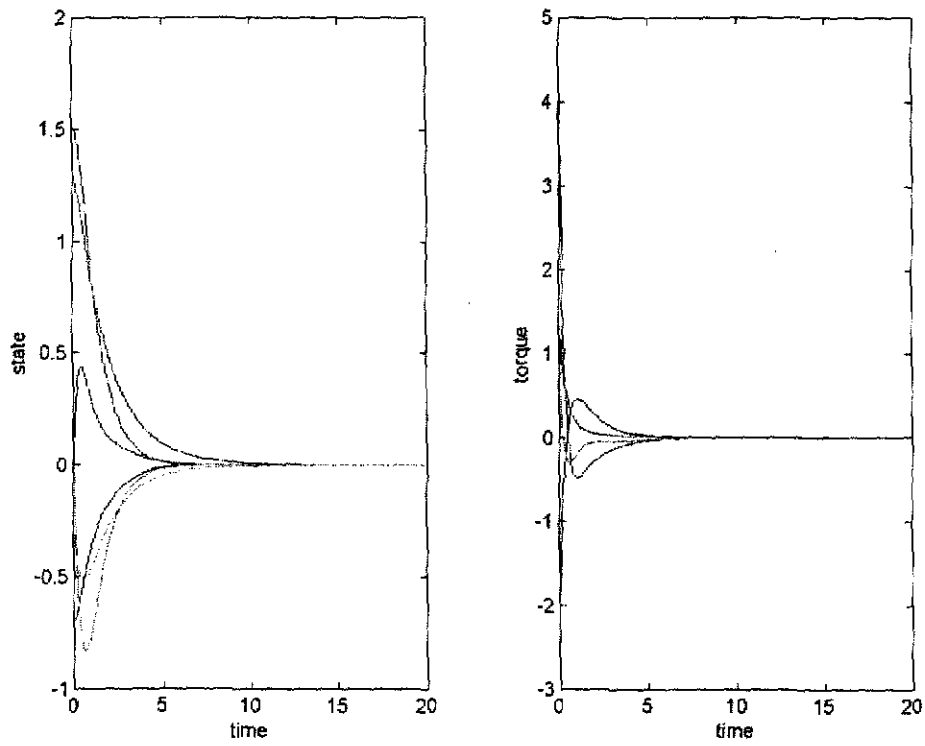


圖 4.21 針對 B2 設計控制器對 B 狀況控制(2nd)

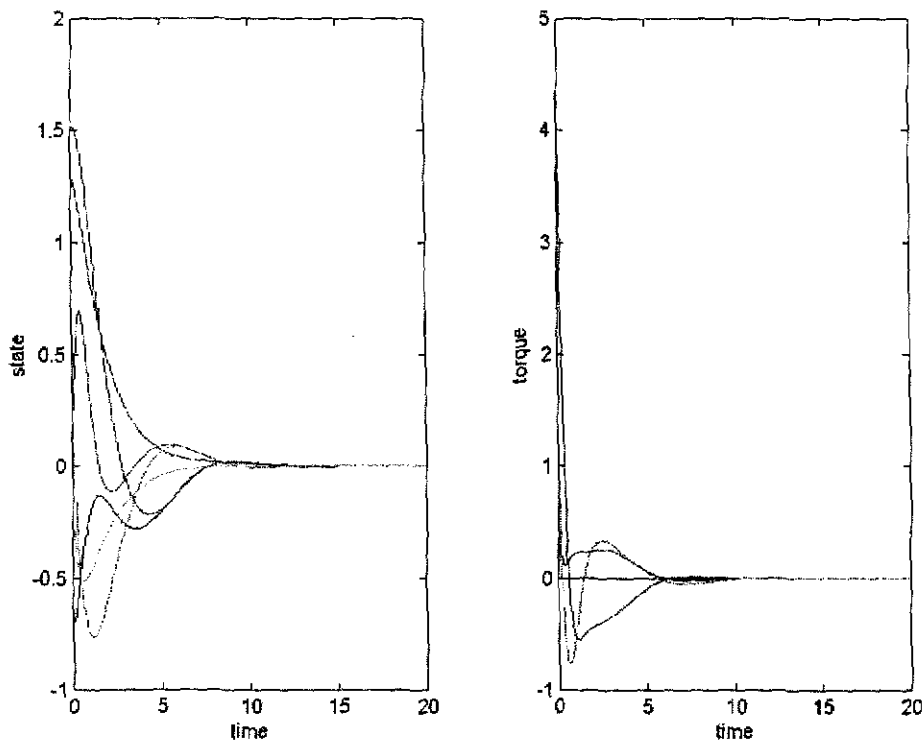


圖 4.22 針對 B2 設計控制器對 B1 狀況控制(2nd)

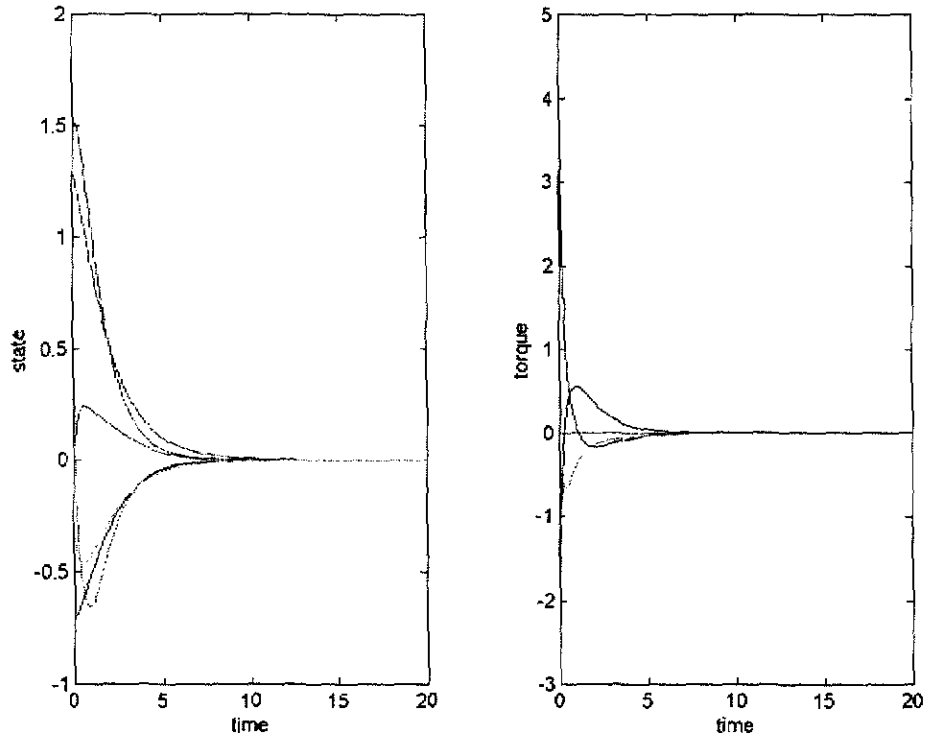


圖 4.23 針對 B2 設計控制器對 B2 狀況控制(2nd)

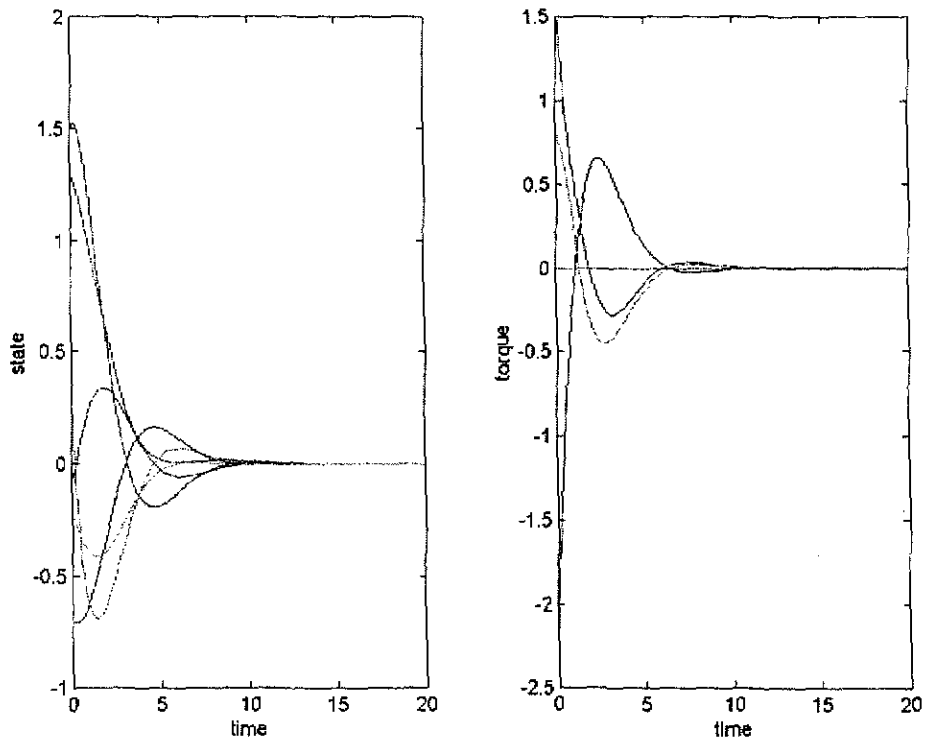


圖 4.24 針對 B2 設計控制器對 B3 狀況控制(2nd)

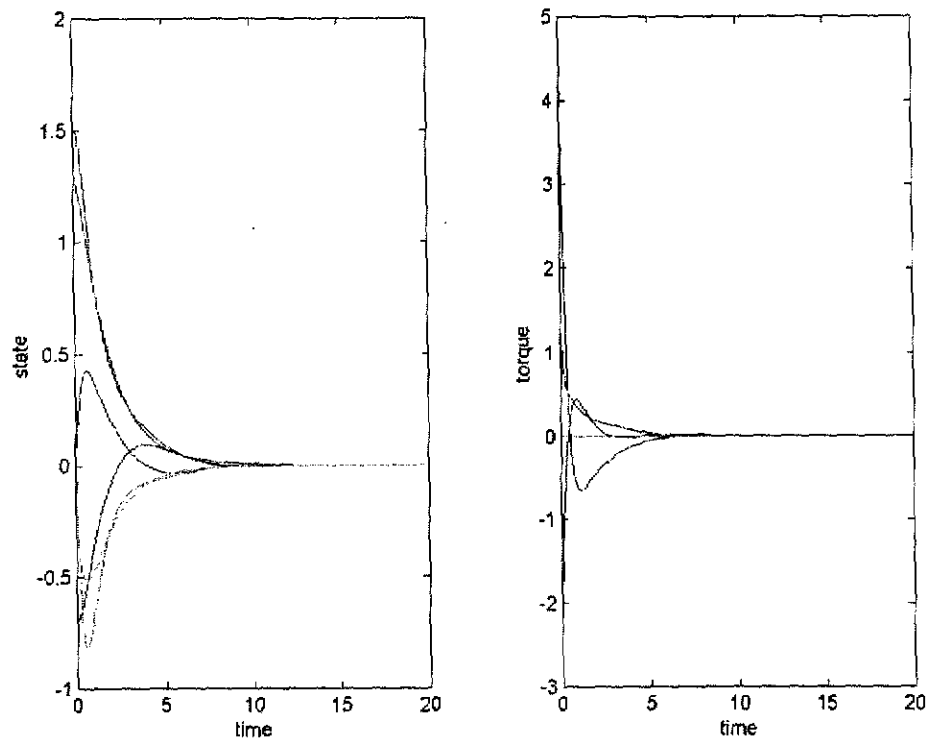


圖 4.25 針對 B2 設計控制器對 B4 狀況控制(2nd)

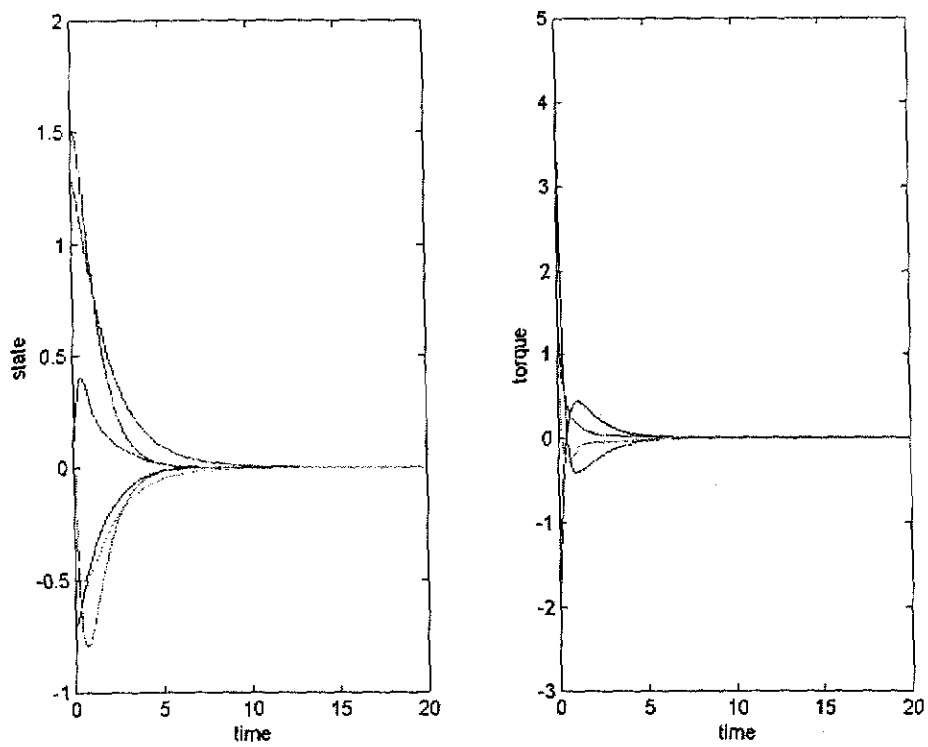


圖 4.26 針對 B2 設計控制器對 B 狀況控制(3rd)

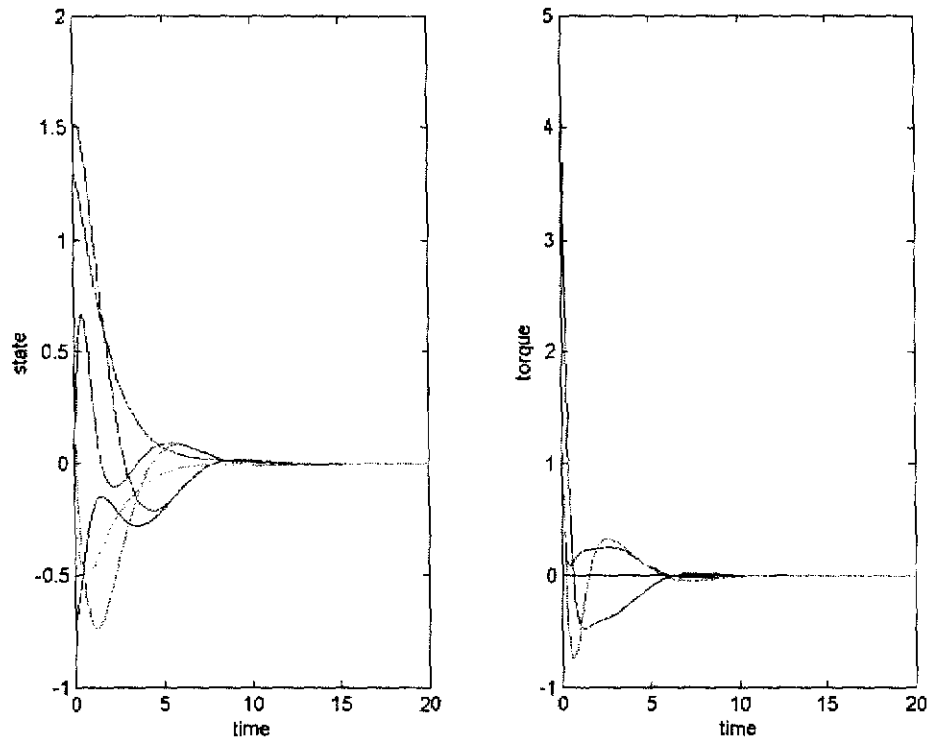


圖 4.27 針對 B2 設計控制器對 B1 狀況控制(3rd)

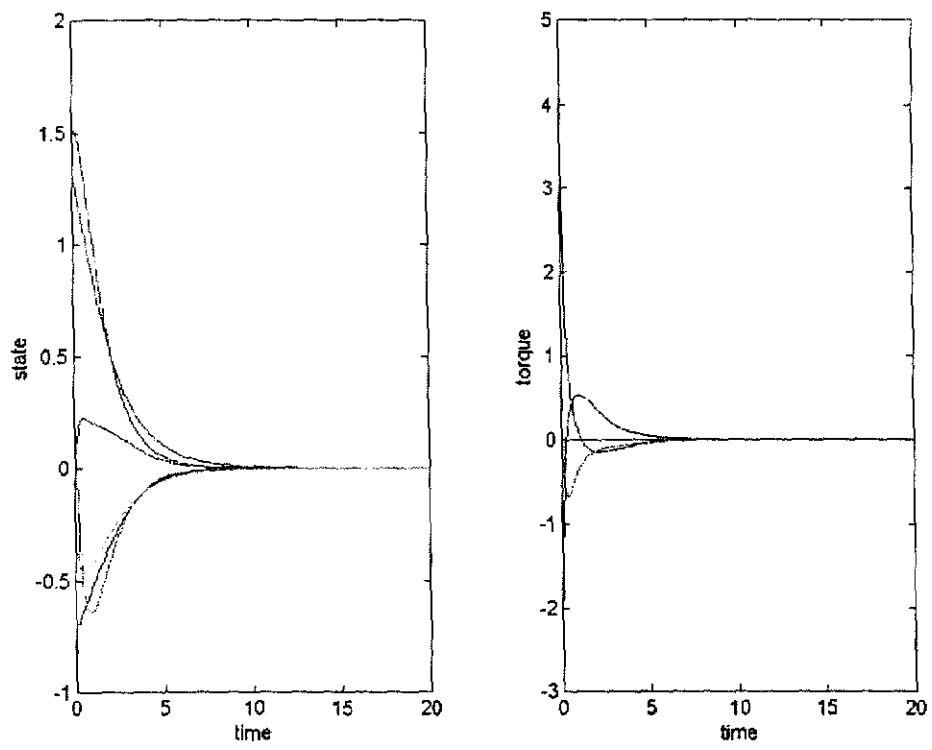


圖 4.28 針對 B2 設計控制器對 B2 狀況控制(3rd)

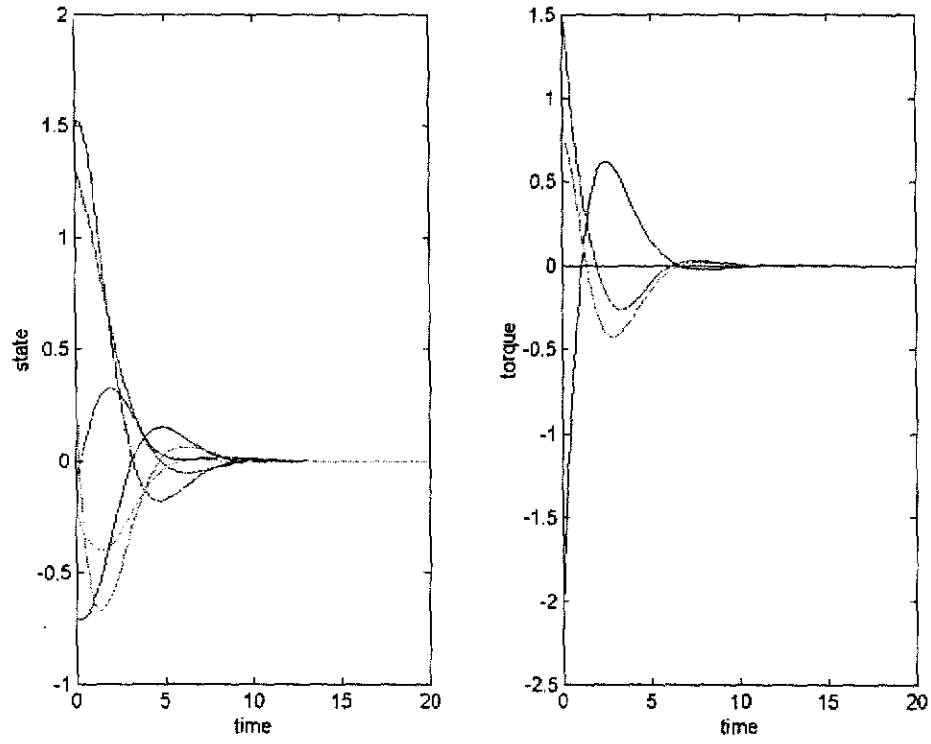


圖 4.29 針對 B2 設計控制器對 B3 狀況控制(3rd)

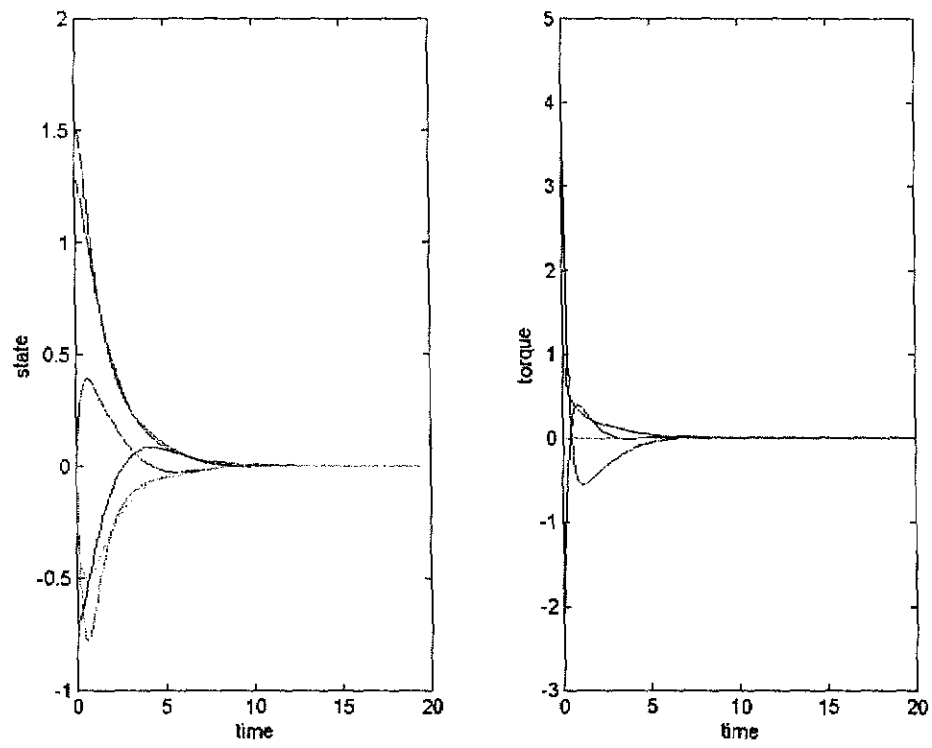


圖 4.30 針對 B2 設計控制器對 B4 狀況控制(3rd)

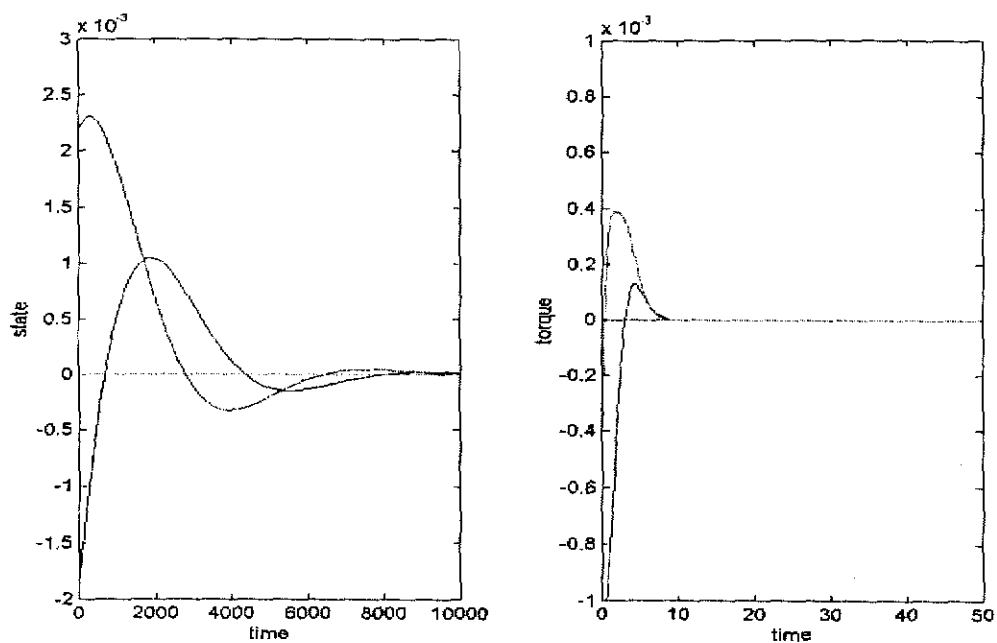


圖 4.31 針對 B12 設計控制器對 B12 失效的情況模擬(1st)

$$\text{初始值 } x(0) = [0.001 \ 0 \ 0.003 \ -0.002 \ 0.001 \ 0]$$

$$\text{系統特徵值 } \lambda(A_c) = \{-1.12 \pm 0.45i, -1.08 \pm 0.46i, -0.0005 \pm 0.0009i\}$$

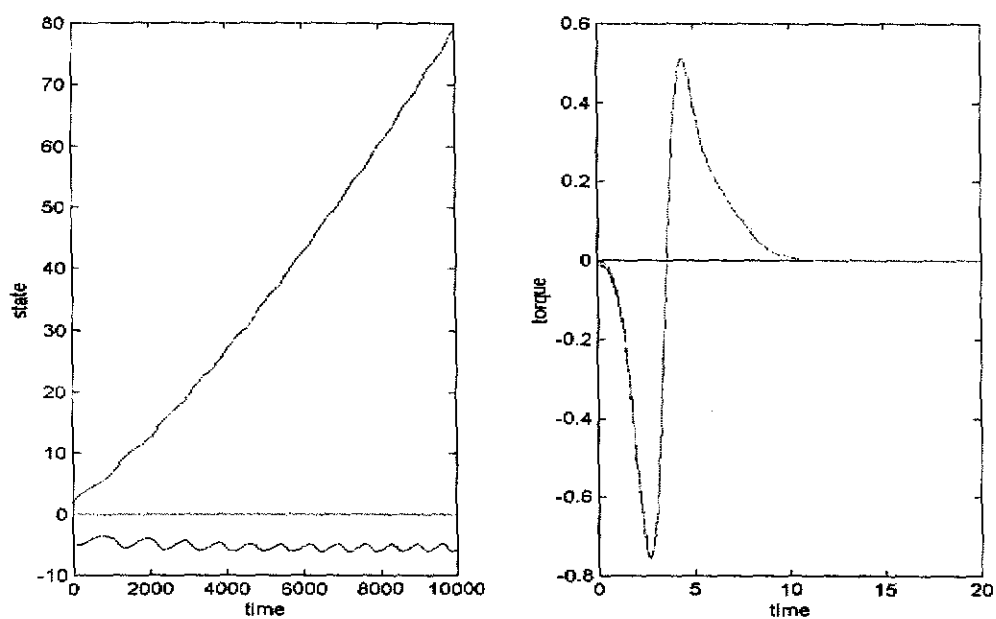


圖 4.32 針對 B12 設計控制器對 B12 失效的情況模擬(1st)

$$\text{初始值 } x(0) = [0.01 \ 0 \ 0.03 \ -0.02 \ 0.01 \ 0]$$

設計控制器之系統	操作當時之系統狀態	控制器之階數	收斂時間 $\max x_i < 0.01$	$\int x^T Qx + u^T Ru$	$V(x_0)$	$\int u^T Ru$	$\ u\ _\infty$
B	B	1st	8.7824	12.1862	16.82	6.3264	6.25
B	B1	1st	11.0618	13.4380		6.4470	6.25
B	B2	1st	8.5168	12.9381		6.4084	4.99
B	B3	1st	12.2523	16.4417		7.3805	4.99
B	B4	1st	8.3769	12.5095		6.6145	6.25
B1	B	1st	10.5363	14.1942	18.14	8.1826	8.73
B1	B1	1st	10.2739	17.0979		10.5916	8.73
B1	B2	1st	10.3368	14.8614		8.1121	8.73
B1	B3	1st	11.6058	17.8421		8.9206	8.66
B1	B4	1st	10.4379	13.8006		7.7119	8.73
B2	B	1st	9.1338	10.5168	12.87	4.7975	5.39
B2	B1	1st	10.7742	12.1971		5.4112	5.39
B2	B2	1st	8.8736	10.9406		4.6418	5.39
B2	B3	1st	9.8059	12.4977		4.8943	3.38
B2	B4	1st	8.8039	10.9798		5.2180	5.39
B3	B	1st	9.1338	10.5186	20.38	4.7975	12.31
B3	B1	1st	10.7742	12.1971		5.4112	12.31
B3	B2	1st	8.8736	10.9406		4.6418	12.31
B3	B3	1st	9.8059	12.4977		4.8943	9.09
B3	B4	1st	8.8039	10.9798		5.2180	12.31
B4	B	1st	9.8572	11.2641	16.26	5.3440	6.28
B4	B1	1st	10.5302	11.5956		4.9513	6.28
B4	B2	1st	9.7825	11.9607		5.3524	6.28
B4	B3	1st	11.8718	15.7861		6.7714	5.01
B4	B4	1st	9.8944	12.1550		6.2533	6.28

表 4.1 利用線性控制器控制系統各種情況

設計控制器之系統	操作當時之系統狀態	控制器之階數	收斂時間 $\max x_i < 0.01$	$\int x^T Qx + u^T Ru$	$V(x_0)$	$\int u^T Ru$	$\ u\ _\infty$
B	B	2nd	8.9022	11.3537	16.43	5.4521	5.88
B	B1	2nd	11.0347	12.5424		5.6560	5.88
B	B2	2nd	8.8098	12.0499		5.4671	5.88
B	B3	2nd	8.6774	11.6670		5.7035	4.52
B	B4	2nd	11.7546	15.0913		6.2660	5.88
B1	B	2nd	10.6606	12.4743	16.93	6.3241	7.78
B1	B1	2nd	10.5542	14.6384		8.1429	7.78
B1	B2	2nd	10.6396	13.1077		6.1837	7.78
B1	B3	2nd	11.3712	15.6308		6.8725	7.39
B1	B4	2nd	10.5704	12.3007		6.0553	7.78
B2	B	2nd	9.6064	9.8355	12.46	4.0835	4.66
B2	B1	2nd	10.7794	11.2779		4.6371	4.66
B2	B2	2nd	9.4136	10.0168		3.6109	4.66
B2	B3	2nd	10.4452	11.8499		4.3397	2.33
B2	B4	2nd	9.3233	10.3175		4.4820	4.66
B3	B	2nd	10.9477	16.2608	20.18	10.1505	11.95
B3	B1	2nd	10.7313	16.5970		9.7790	11.95
B3	B2	2nd	10.7308	16.3661		9.7589	11.95
B3	B3	2nd	10.8493	20.1494		12.6708	8.67
B3	B4	2nd	10.8290	16.1396		9.9914	11.95
B4	B	2nd	9.9829	10.5038	15.57	4.5543	5.76
B4	B1	2nd	10.5142	10.9287		4.3667	5.76
B4	B2	2nd	9.9600	11.1825		4.5044	5.76
B4	B3	2nd	11.6441	14.4141		5.6441	4.42
B4	B4	2nd	10.0523	11.2229		5.2403	5.76

表 4.2 利用 (線性+二階) 控制器控制系統的各種情況

設計控制器之系統	操作當時之系統狀態	控制器之階數	收斂時間 $\max x_i < 0.01$	$\int x^T Qx + u^T Ru$	$V(x_0)$	$\int u^T Ru$	$\ u\ _\infty$
B	B	3rd	8.9777	11.2492	15.85	5.3214	5.81
B	B1	3rd	10.9121	12.4371		5.5256	5.81
B	B2	3rd	8.8164	11.9822		5.3622	5.81
B	B3	3rd	11.9302	14.8867		6.0892	4.45
B	B4	3rd	8.6869	11.5348		5.5517	5.81
B1	B	3rd	10.7746	12.1676	16.02	5.9493	7.55
B1	B1	3rd	10.4181	14.1745		7.6127	7.55
B1	B2	3rd	10.7884	12.8931		5.8740	7.55
B1	B3	3rd	11.3171	15.0838		6.3964	7.08
B1	B4	3rd	10.5096	11.9859		5.6831	7.55
B2	B	3rd	9.5696	9.6689	11.94	3.8446	4.66
B2	B1	3rd	10.7115	11.0773		4.3784	4.66
B2	B2	3rd	9.7187	9.9871		3.5037	4.66
B2	B3	3rd	10.4120	11.6478		4.1109	2.35
B2	B4	3rd	9.4099	10.0684		4.1745	4.66
B3	B	3rd	10.9873	16.0586	19.93	9.9368	11.77
B3	B1	3rd	10.7200	16.4231		9.5900	11.77
B3	B2	3rd	10.8119	16.2037		9.5855	11.77
B3	B3	3rd	10.9524	19.8286		12.3452	8.53
B3	B4	3rd	10.8421	15.9074		9.7554	11.77
B4	B	3rd	10.0120	10.4333	15.22	4.4589	5.66
B4	B1	3rd	10.5182	10.8696		4.2806	5.66
B4	B2	3rd	9.9965	11.1567		4.4436	5.66
B4	B3	3rd	11.5636	14.2261		5.4842	4.33
B4	B4	3rd	9.8313	11.1028		5.1011	5.66

表 4.3 利用 (線性+二階+三階) 控制器控制系統的各種情況

Controller order selected gains	1st	2nd	3rd
2 (放大)	10.71	10.24	9.99
1 (正常)	10.42	9.58	9.48
0.5 (衰減)	10.52	9.84	9.67
0 (故障)	10.94	10.02	9.99

表 4.4 不同增益值時 $\int (x^T Qx + u^T Ru) dt$ 的比較(針對 B2 設計)

5 結論

本計劃的主要目的是在探討如何設計可靠度控制器，並分析其性能表現。所謂可靠度控制系統是指經由適當的控制器設計後，能忍受特定致動器發生故障而仍能保持系統穩定運作之控制系統。

在此計畫中我們已完成下列事項：

- 提出可靠度控制器之設計法則
- 分析閉迴路系統之穩定性
- 估測可靠度控制器之性能表現
- 估測可靠度控制器增益之容許範圍
- 提出 H-J 不等式二次解之存在條件
- 應用於衛星姿態可靠度控制之數值模擬

透過數值模擬，我們驗證了四軸控制之衛星系統經由可靠度控制器的設計後，不但可以忍受任何一軸致動器發生故障，而且也估測了其性能指標。然而當有兩軸同時故障時，系統將呈現出近乎臨界系統（Critical System）的特性，也就是閉迴路系統線性項之特徵根幾乎落在虛軸上。由於此近乎臨界系統之特性，使得系統所需的穩定時間大幅增加，同時外界的擾動（disturbance）也可能破壞系統的穩定性。從數值模擬的結果，我們也觀察到在系統有兩軸同時出現故障的情況下，不同的初始值設定會導致系統出現穩定及不穩定截然不同的結果。而出現不同結果的關鍵在於系統狀態是否落在閉迴路系統操作點之收斂區間（domain of attraction）內，也就是說，如果一開始的初始值或受擾動之系統狀態落在收斂區間外，則

將導致系統呈現出不穩定的結果。

由於上述衛星系統兩軸同時出現故障時所呈現出的緩慢收斂及不明確收斂區間問題，在未來的研究上，我們擬估測系統操作點之收斂區間並應用 singular perturbation 理論對控制能量做有效率的分配。

考慮使用 singular perturbation 理論的原因是它能將系統之反應分離出快速及慢速模式 (fast and slow mode)。如此一來，我們可以將控制能量用在慢速模式上以加快系統狀態之收斂速率並使控制更有效率。此外，除了本計劃之被動性可靠度控制外，主動性(Active)可靠度控制器之設計議題，也是值得我們去深入研究。

參考文獻

- [1] V. A. Chobotov, *Spacecraft Attitude Dynamics and Control*, Krieger Publishing Company, 1991.
- [2] J. -H. Fu and E. H. Abed. "Families of Lyapunov functions for nonlinear systems in critical cases," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 18, pp.3-16, 1993.
- [3] J. Huang and C. -F. Lin, "Numerical approach to computing nonlinear H_∞ control laws," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 18, No. 5, pp.989-994, 1995
- [4] T. Kailath, "Linear System," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [5] W. Kang, P. K. De, and A. Isidori, "Flight control in a windshear via nonlinear H_∞ method," *Proc. IEEE Control and Decision Conference*, pp.1135-1142, 1992.
- [6] R. E. Kalman, "When is a linear control system optimal?," *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, pp51-60, March 1964.
- [7] M. H. Kaplan, *Modern Spacecraft Dynamics and Control*, John Wiley & Sons, 1976.
- [8] Y. -W. Liang, D. -C. Liaw and T. -C Lee, "Reliable control of nonlinear systems," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 45, No. 4, pp.706-710, 2000.
- [9] D. -C Liaw and E. H. Abed, "Active control of compressor stall inception : A bifurcation-theoretic approach," *Automatica*, vol. 32, no. 1, pp.109-115, 1996.
- [10] D. -C. Liaw, Y. -W. Liang, and T. -C. Lee, "Minimum energy

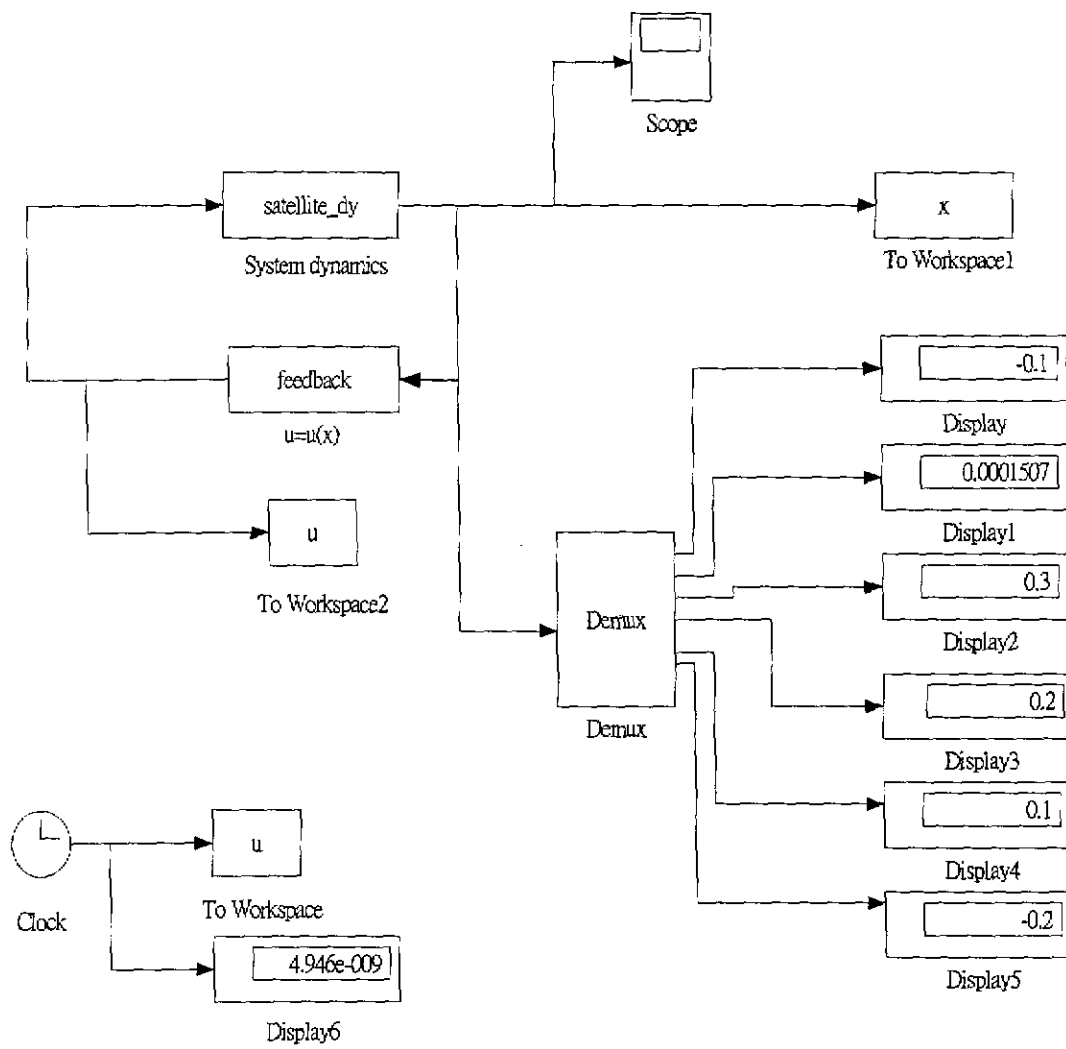
- design of nonlinear systems," Proc. 1997 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, Hawaii, pp. 61-64, 1997.
- [11] D. -C. Liaw and E. H. Abed, "Stabilization of tethered satellites during station keeping," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 35, no. 11, pp. 1186-1196, 1990.
- [12] D. -C. Liaw, "Feedback Stabilization via Center Manifold Reduction with Application to Tethered Satellites," Ph.D. Dissertation, Dept. of Electrical Engineering, Univ. of Maryland, College Park, 1990.
- [13] J.-C. Lin and D.-C. Liaw, "Attitude control for satellite systems," 碩士論文, 1990
- [14] Vidyasagar M. and Viswanadham N., "Algebraic design techniques for reliable stabilization," *IEEE Transaction Automatic Control*, pp. 1085-1095, 1982.
- [15] Vidyasagar M. and Viswanadham N., "Reliable stabilization using a multi-controller configuration," *Automatica*, pp. 599-602, 1985.
- [16] R. J. Veillette, "Reliable linear-quadratic state-feedback control," *Automatica*, vol. 31, pp. 137-143, 1995
- [17] G. -H. Yang, J. Lam, and J. Wang, "Reliable controller design for nonlinear system," *Proc. 35th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 112-117, 1996.
- [18] G. -H. Yang, Y. Liu, and J. Wang, and C. B. Soh, "Reliable nonlinear controller system design using redundant control element," *Proc. 35th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp.

118-123, 1996.

- [19] J. R. Wertz, Spacecraft attitude determination and control,
Kluwer Academic Publishers, 1978.

附錄 A MATLAB 及 SIMULINK 程式

satellite_bk.mdl



main.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% If there are no data.mat, dataMN.mat and                               %
% datagain.mat, one should run data.m, findMN.m and                     %
% gain.m before simulation.                                             %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear, clc,
%----This step generate the system data and store them in data.mat
%   data;
%----This step create the data for M_k and N_k and store them in dataMN.mat
%   findMN;
%----Here assign the parameters
load data
R=eye(4);
Q=eye(6);
Bd=B2;                                     % <===Designed faulty system
Bf=B;                                       % <===normal or faulty system
save data Bf Bd R Q -append
%----Here provides the components of V_x: i.e., S_2, s_3 and S_4,
%   and store them in gain.mat,gain
%----Here assign initial state and some parameters
fast=1;                                     % <===To speed the simulation
x0 = [-0.7 -0.07 1.5 0.3 1.3 -0.2];        % <===To assign initial condition
% To assign the order of controller. 1=linear, 2=linear+quadratic, 3=linear+quadratic+cubic
order=3;
save data fast x0 order -append
%----Here gives simulation results
Tf=20;                                     % set OutputPoints in satellite_bk/simulation/parameter
sim('satellite_bk',[0 Tf])
figure(1), plot(t,x)
figure(2), plot(t,u)
%----Here store the simulation data.
%----Be sure to change the store data_name and time sclae
index=size(t);
!del temp.m
fprintf('temp.m',' Here are the data for t, x and u with min as time-scale\n')
for k=1:index,
fprintf('temp.m','%10.6f %12.6f %12.6f %12.6f %12.6f %12.6f %12.6f %12.6f %12.6f %12.6f
%12.6f;\n', t(k), x(k,1), x(k,2), x(k,3), x(k,4), x(k,5), x(k,6), u(k,1), u(k,2), u(k,3), u(k,4
)), end
!copy temp.m datanon3_B2B_x5_20.m

%=====
```

data.m

```
% This file provides the necessary system data
clear, clc,
!del data.mat
w0=1.0312e-3;
w00=w0*w0;
Ix=2000; Iy=400; Iz=2000;
k1=(Ix-Iy)/Iz; k2=(Iy-Iz)/Ix; k3=Iy/Ix;
a1=w00*k2; a2=w0*k3;
% Here is the 1st order term of f(x)
```



```

A=[0 1 0 0 0 0;-2*a1 0 0 0 0 a2;0 0 0 1 0 0;0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 1;0 -a2 0 0 a1 0];
% Here is the 2nd order term of f(x)
f2nd2=[0 0 0 k2*w0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 k2*w0 0 0 0 k2 0 0 0];
f2nd4=[0 w0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 w0 0];
f2nd6=[0 0 -3*k1*w0 0 0 0 0 0 k1 0 0 0 0 0 -w0 0 -w0*(1+k1) 0 0 0 0];
f2nd=[zeros(1, 21);f2nd2;zeros(1, 21);f2nd4;zeros(1, 21);f2nd6];
% Here is the 3rd order term of f(x)
f3rd2=zeros(1, 56); f3rd4=zeros(1, 56); f3rd6=zeros(1, 56);
f3rd2(1)=(4*w00*k2)/3;
f3rd2(6)=-(w0*k2)/2;
f3rd2(12)=3*w00*k2;
f3rd2(19)=-w00*k2;
f3rd2(42)=w0*(k2-1);
f3rd2(40)=-w0/2;
f3rd2(54)=-(w0*k3)/2;
f3rd4(15)=w0;
f3rd4(17)=w0;
f3rd4(29)=w0;
f3rd6(2)=(w0*k3)/2;
f3rd6(5)=(w00*k1)/2;
f3rd6(20)=w0;
f3rd6(34)=(w0*k3)/2;
f3rd6(39)=(w00*k1)/2;
f3rd6(53)=(2*w00*k1)/3;
f3rd=[zeros(1, 56);f3rd2;zeros(1, 56);f3rd4;zeros(1, 56);f3rd6];
B=[0 0 0 0;0.67 0.67 0.67 0.67;0 0 0 0;0.69 -0.69 -0.69 0.69;0 0 0 0;0.28 0.28 -0.28 -0.28];
B1=[0 0 0 0;0 0.67 0.67 0.67;0 0 0 0;0 -0.69 -0.69 0.69;0 0 0 0;0 0.28 -0.28 -0.28];
B2=[0 0 0 0;0.67 0 0.67 0.67;0 0 0 0;0.69 0 -0.69 0.69;0 0 0 0;0.28 0 -0.28 -0.28];
B3=[0 0 0 0;0.67 0.67 0 0.67;0 0 0 0;0.69 -0.69 0 0.69;0 0 0 0;0.28 0.28 0 -0.28];
B4=[0 0 0 0;0.67 0.67 0.67 0;0 0 0 0;0.69 -0.69 -0.69 0;0 0 0 0;0.28 0.28 -0.28 0];
B12=[0 0 0 0;0 0 0.67 0.67;0 0 0 0;0 0 -0.69 0.69;0 0 0 0;0 0 -0.28 -0.28];
B13=[0 0 0 0;0 0.67 0 0.67;0 0 0 0;0 -0.69 0 0.69;0 0 0 0;0 0.28 0 -0.28];
B14=[0 0 0 0;0 0.67 0.67 0;0 0 0 0;0 -0.69 -0.69 0;0 0 0 0;0 0.28 -0.28 0];
save data w0 w00 Ix Iy Iz a1 a2 k1 k2 k3 A f2nd f3rd B B1 B2 B3 B4 B12 B13 B14

```

=====

feedback.m

```

function [sys, x0, str, ts] = feedback(t, x, u, flag)      %<---- Fill in the name of the subroutine
switch flag,
case 0,
    [sys, x0, str, ts]=mdlInitializeSizes;
case 1,
    sys=mdlDerivatives(t, x, u);
case 2,
    sys=mdlUpdate(t, x, u);
case 3,
    sys=mdlOutputs(t, x, u);
case 4,
    sys=mdlGetTimeOfNextVarHit(t, x, u);
case 9,
    sys=mdlTerminate(t, x, u);
otherwise
    error(['Unhandled flag = ', num2str(flag)]);
end

```

=====

```

function [sys,x0,str,ts]=mdlInitializeSizes
sizes = simsizes;
sizes.NumContStates = 0;           %<----- Fill it
sizes.NumDiscStates = 0;          %<----- Fill it
sizes.NumOutputs = 4;             %<----- Fill it
sizes.NumInputs = 6;             %<----- Fill it
sizes.DirFeedthrough = 0;
sizes.NumSampleTimes = 1;        % at least one sample time is needed
sys = simsizes(sizes);
x0=[];
str = [];
ts = [0 0];
%=====
function sys=mdlDerivatives(t,x,u) %<----- Fill the system dynamics
sys= [];
%=====
function sys=mdlUpdate(t,x,u)
sys = [];
%=====
function sys=mdlOutputs(t,x,u) %<----- Fill the system output
load data
load datamn
load datagain
u11=0; u21=0; u31=0;
a=0.67;b=0.69;c=0.28
for j=1:6,
    u11=u11-S2(2,j)*u(j);
    u21=u21-S2(4,j)*u(j);
    u31=u31-S2(6,j)*u(j);
end
if Bf==B,
    g1=a*u11+b*u21+c*u31;
    g2=a*u11-b*u21+c*u31;
    g3=a*u11-b*u21-c*u31;
    g4=a*u11+b*u21-c*u31;
elseif Bf==B11,
    g1=0;
    g2=a*u11-b*u21+c*u31;
    g3=a*u11-b*u21-c*u31;
    g4=a*u11+b*u21-c*u31;
elseif Bf==B2,
    g1=a*u11+b*u21+c*u31;
    g2=0;
    g3=a*u11-b*u21-c*u31;
    g4=a*u11+b*u21-c*u31;
elseif Bf==B3,
    g1=a*u11+b*u21+c*u31;
    g2=a*u11-b*u21+c*u31;
    g3=0;
    g4=a*u11+b*u21-c*u31;
else,
    g1=a*u11+b*u21+c*u31;
    g2=a*u11-b*u21+c*u31;
    g3=a*u11-b*u21-c*u31;
    g4=0;
end
if order==1,
    sys = [g1;gain*g2;g3;g4];

```

```

%=====
elseif order==2,
    u12=0; u22=0; u32=0;
    for i=1:6,
        for j=1:6,
            u12=u12-0.5*S3(6*(i-1)+j,2)*u(i)*u(j);
            u22=u22-0.5*S3(6*(i-1)+j,4)*u(i)*u(j);
            u32=u32-0.5*S3(6*(i-1)+j,6)*u(i)*u(j);
        end
    end
    if Bf==B,
        g1=a*(u11+u12)+b*(u21+u22)+c*(u31+u32);
        g2=a*(u11+u12)-b*(u21+u22)+c*(u31+u32);
        g3=a*(u11+u12)-b*(u21+u22)-c*(u31+u32);
        g4=a*(u11+u12)+b*(u21+u22)-c*(u31+u32);
    elseif Bf==B11,
        g1=0;
        g2=a*(u11+u12)-b*(u21+u22)+c*(u31+u32);
        g3=a*(u11+u12)-b*(u21+u22)-c*(u31+u32);
        g4=a*(u11+u12)+b*(u21+u22)-c*(u31+u32);
    elseif Bf==B2,
        g1=a*(u11+u12)+b*(u21+u22)+c*(u31+u32);
        g2=0;
        g3=a*(u11+u12)-b*(u21+u22)-c*(u31+u32);
        g4=a*(u11+u12)+b*(u21+u22)-c*(u31+u32);
    elseif Bf==B3,
        g1=a*(u11+u12)+b*(u21+u22)+c*(u31+u32);
        g2=a*(u11+u12)-b*(u21+u22)+c*(u31+u32);
        g3=0;
        g4=a*(u11+u12)+b*(u21+u22)-c*(u31+u32);
    else,
        g1=a*(u11+u12)+b*(u21+u22)+c*(u31+u32);
        g2=a*(u11+u12)-b*(u21+u22)+c*(u31+u32);
        g3=a*(u11+u12)-b*(u21+u22)-c*(u31+u32);
        g4=0;
    end
    sys = [g1;gain*g2;g3;g4];
else
    u12=0;u22=0;u32=0;
    u13=0;u23=0;u33=0;
    for i=1:6,
        for j=1:6,
            u12=u12-0.5*S3(6*(i-1)+j,2)*u(i)*u(j);
            u22=u22-0.5*S3(6*(i-1)+j,4)*u(i)*u(j);
            u32=u32-0.5*S3(6*(i-1)+j,6)*u(i)*u(j);
        end
    end
    for i=1:6,
        for j=1:6,
            for k=1:6,
                u13=u13-0.5*S4(36*(i-1)+6*(j-1)+k,2)*u(i)*u(j)*u(k);
                u23=u23-0.5*S4(36*(i-1)+6*(j-1)+k,4)*u(i)*u(j)*u(k);
                u33=u33-0.5*S4(36*(i-1)+6*(j-1)+k,6)*u(i)*u(j)*u(k);
            end
        end
    end
    if Bf==B,
        g1=a*(u11+u12+u13)+b*(u21+u22+u23)+c*(u31+u32+u33);

```

```

    g2=a*(u11+u12+u13)-b*(u21+u22+u23)+c*(u31+u32+u33);
    g3=a*(u11+u12+u13)-b*(u21+u22+u23)-c*(u31+u32+u33);
    g4=a*(u11+u12+u13)+b*(u21+u22+u23)-c*(u31+u32+u33);
elseif Bf==B11,
    g1=0;
    g2=a*(u11+u12+u13)-b*(u21+u22+u23)+c*(u31+u32+u33);
    g3=a*(u11+u12+u13)-b*(u21+u22+u23)-c*(u31+u32+u33);
    g4=a*(u11+u12+u13)+b*(u21+u22+u23)-c*(u31+u32+u33);
elseif Bf==B2,
    g1=a*(u11+u12+u13)+b*(u21+u22+u23)+c*(u31+u32+u33);
    g2=0;
    g3=a*(u11+u12+u13)-b*(u21+u22+u23)-c*(u31+u32+u33);
    g4=a*(u11+u12+u13)+b*(u21+u22+u23)-c*(u31+u32+u33);
elseif Bf==B3,
    g1=a*(u11+u12+u13)+b*(u21+u22+u23)+c*(u31+u32+u33);
    g2=a*(u11+u12+u13)-b*(u21+u22+u23)+c*(u31+u32+u33);
    g3=0;
    g4=a*(u11+u12+u13)+b*(u21+u22+u23)-c*(u31+u32+u33);
else,
    g1=a*(u11+u12+u13)+b*(u21+u22+u23)+c*(u31+u32+u33);
    g2=a*(u11+u12+u13)-b*(u21+u22+u23)+c*(u31+u32+u33);
    g3=a*(u11+u12+u13)-b*(u21+u22+u23)-c*(u31+u32+u33);
    g4=0;
end
sys = [g1;g2;g3;g4];
end
%=====
function sys=mdlGetTimeOfNextVarHit(t, x, u)
sampleTime = 1;
sys = t + sampleTime;
%=====
function sys=mdlTerminate(t, x, u)
sys = [];
%=====

satellite_dy.m

%This file is to setup satellite' s model
function [sys, x0, str, ts] = satellite_dy(t, x, u, flag) %<----- Fill in the name of the subroutine
switch flag,
case 0,
    [sys, x0, str, ts]=mdlInitializeSizes;
case 1,
    sys=mdlDerivatives(t, x, u);
case 2,
    sys=mdlUpdate(t, x, u);
case 3,
    sys=mdlOutputs(t, x, u);
case 4,
    sys=mdlGetTimeOfNextVarHit(t, x, u);
case 9,
    sys=mdlTerminate(t, x, u);
otherwise
    error(['Unhandled flag = ', num2str(flag)]);
end
%=====

```

```

function [sys,x0,str,ts]=mdlInitializeSizes
sizes = simsizes;
sizes.NumContStates = 6;           %<----- Fill it
sizes.NumDiscStates = 0;          %<----- Fill it
sizes.NumOutputs = 6;             %<----- Fill it
sizes.NumInputs = 4;              %<----- Fill it
sizes.DirFeedthrough = 0;
sizes.NumSampleTimes = 1;         % at least one sample time is needed
sys = simsizes(sizes);
load data
x0 = [-0.7 -0.07 1.5 0.3 1.3 -0.2]; %<----- Fill the initial state
str = [];
ts = [0 0];
%=====
function sys=mdlDerivatives(t,x,u) %<----- Fill the system dynamics
load data
s1=sin(x(1));
s3=sin(x(3));
s5=sin(x(5));
c1=cos(x(1));
c3=cos(x(3));
c5=cos(x(5));
s135=s1*s3*s5;
s35=s3*s5;
c15=c1*c5;
c5s1=c5*s1;
s5c3=s5*c3;
a21=w0*(x(6)*c5*c3-x(4)*s35);
a22=x(4)*x(6)+w0*x(4)*(c1*s35+c5s1);
a23=w0*x(6)*c15+w0*c15*(c1*s35+c5s1);
a24=-w0*x(6)*s135-w0*s35*s135*c1;
a25=-w0*(c5s1*s135+3*c3*c3*s1*c1);
a41=w0*(x(6)*s5*c1+x(2)*c5s1+x(6)*c5s1*s3);
a42=w0*(x(4)*s5c3*s1+x(2)*s35*c1);
a61=w0*(x(2)*s135-x(6)*s3*c15-x(4)*c1*s5c3);
a62=w0*(x(6)*s5*s1-x(2)*c15);
a63=x(2)*x(4)+w0*x(2)*(c15-s135);
a64=-s5c3*(w0*x(4)+w0*c15);
a65=w0*(s5c3*s135-3*s3*c3*s1);
f2=a21+k2*(a22+a23+a24+a25);
f4=a41+a42;
f6=a61+a62+k1*(a63+a64+a65);
sys=fast*[x(2);f2;x(4);f4;x(6);f6]+Bf*u;
%=====
function sys=mdlUpdate(t,x,u)
sys = [];
%=====
function sys=mdlOutputs(t,x,u) %<----- Fill the system output
sys = x;
%=====
function sys=mdlGetTimeOfNextVarHit(t,x,u)
sampleTime = 1;
sys = t + sampleTime;
%=====
function sys=mdlTerminate(t,x,u)
sys = [];
%=====

```

findmn.m

```
% THIS FILE COMPUTES THE MATRICES M_K AND N_K FOR C. -F. LIN'S AIAA PAPER.
clear, clc,
!del datamn.mat
% denote x to be a set of distinct prime numbers
x1=1; x2=2; x3=3; x4=5; x5=7; x6=11;
x=[x1;x2;x3;x4;x5;x6];
% compute the kronecker product
z=kron(x,x);
% find y that deleted all the repeated terms of z
for i=2:1:36,
    for j=1:i-1,
        if z(i)==z(j), z(i)=0; break, end
    end
end
y(1)=z(1); count=2;
for i=2:1:36,
    if z(i) ~= 0, y(count)=z(i); count=count+1; end
end
y=y';
% find M2 and N2
z=kron(x,x);
M2=zeros(21,36);
for i=1:1:21,
    for j=1:1:36,
        if y(i)==z(j), M2(i,j)=1; break, end
    end
end
N2=zeros(36,21);
for i=1:1:36,
    for j=1:1:21,
        if z(i)==y(j), N2(i,j)=1; break, end
    end
end
save datamn M2 N2
%%-----
% compute the kronecker product
z=kron(x,kron(x,x));
% find y that deleted all the repeated terms of z
for i=2:1:216,
    for j=1:i-1,
        if z(i)==z(j), z(i)=0; break, end
    end
end
y(1)=z(1); count=2;
for i=2:1:216,
    if z(i) ~= 0, y(count)=z(i); count=count+1; end
end
y=y';
% find M3 and N3
z=kron(x,kron(x,x));
M3=zeros(56,216);
for i=1:1:56,
    for j=1:1:216,
        if y(i)==z(j), M3(i,j)=1; break, end
    end
end
```

```

end
N3=zeros(216,56);
for i=1:1:216,
    for j=1:1:56,
        if z(i)==y(j), N3(i,j)=1; break, end
    end
end
end
save datamn M3 N3 -append
%-----
% compute the kronecker product
z=kron(x, kron(x, kron(x, x)));
% find y that deleted all the repeated terms of z
for i=2:1:1296,
    for j=1:1:i-1,
        if z(i)==z(j), z(i)=0; break, end
    end
end
end
y(1)=z(1); count=2;
for i=2:1:1296,
    if z(i) ~= 0, y(count)=z(i); count=count+1; end
end
y=y';
% find M4 and N4
z=kron(x, kron(x, kron(x, x)));
M4=zeros(126, 1296);
for i=1:1:126,
    for j=1:1:1296,
        if y(i)==z(j), M4(i, j)=1; break, end
    end
end
end
N4=zeros(1296, 126);
for i=1:1:1296,
    for j=1:1:126,
        if z(i)==y(j), N4(i, j)=1; break, end
    end
end
end
save dataMN M4 N4 -append

```

%=====

gain.m

```

% This file provides the components for V_x: i.e., S_2, S_3 and S_4
clear, clc,
ldel datagain.mat
load data
R=eye(4);
Q=eye(6);
%---Here find linear part of the control
[K,P]=lqr(A, B, 2*Q, R);
S2=2*P;
Hpp=-0.5*B*inv(R)*B';
save datagain P S2 Hpp
HppP=Hpp*S2;
save data1 HppP -append
%---Here find 2nd order part of the control
load datamn

```

```

%----->> Here evaluate row(P*f2nd*M2)
T3=S2*f2nd*M2;
for i=1:1:6,
    for j=1:1:36,
        E3(j+(i-1)*36)=T3(i, j);
    end
end
V3=-E3*N3;
U3=M3*(kron(A+HppP, eye(36))+kron(kron(eye(6), A+HppP), eye(6))+kron(eye(36), A+HppP))*N3;
P3=V3/U3;
%----->> Here find S3
Temp=P3*M3;
for i=1:1:6,
    for j1=1:1:36,
        P31(i, j1)=Temp((i-1)*36+j1);
    end
    for j2=1:1:6,
        for j3=1:1:6,
            P32(i, (j2-1)*6+j3)=Temp(6*(i-1)+(j2-1)*36+j3);
        end
    end
    for j4=1:1:36,
        P33(i, j4)=Temp(i+(j4-1)*6);
    end
end
S3=(P31+P32+P33)';
save datagain S3 P3 -append
%=====
%----- Here find 3rd order part of the control
%----->> Here evaluate row(P*f2nd*M2)
T41=S2*f3rd*M3;
for i=1:1:6,
    for j=1:1:216,
        E41(j+(i-1)*216)=T41(i, j);
    end
end
T42=S3*f2nd*M2;
for i=1:1:36,
    for j=1:1:36,
        E42(j+(i-1)*36)=T42(i, j);
    end
end
E4=E41+E42;
Z4=P3*M3*(kron(Hpp*S3', eye(36))+kron(kron(eye(6), Hpp*S3'), eye(6))+kron(eye(36), Hpp*S3' ));
V4=-(E4+0.5*Z4)*N4;
U4=M4*(kron(A+HppP, eye(216))+kron(kron(eye(6), A+HppP), eye(36))+kron(kron(eye(36), A+HppP), eye(6))+kron(eye(216), A+HppP))*N4;
P4=V4/U4;
%----->> Here find S4
Temp=P4*M4;
for i=1:1:6,
    for j1=1:1:216,
        P41(i, j1)=Temp((i-1)*216+j1);
    end
    for j2=1:1:6,
        for j3=1:1:36,
            P42(i, (j2-1)*36+j3)=Temp(36*(i-1)+(j2-1)*216+j3);
        end
    end
end

```



```
end
for j4=1:1:36,
    for j5=1:1:6,
        P43(i, (j4-1)*6+j5)=Temp(6*(i-1)+(j4-1)*36+j5);
    end
end
for j6=1:1:216,
    P44(i, j6)=Temp(i+(j6-1)*6);
end
end
S4=(P41+P42+P43+P44)';
save datagain S4 P4 - append
```