



# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

## 以 GRACE 衛星資料決定重力場 Gravity determination from GRACE satellite data

計畫編號：NSC 90-2211-E-009-049

執行期限：90 年 8 月 1 日至 91 年 7 月 31 日

主持人：黃金維 國立交通大學土木工程學系

計畫參與人員：王成機 國立交通大學土木工程學系

### 一、中文摘要

重力回復及氣候實驗 (GRACE) 為一美、德兩國之衛星任務，旨在使用兩低軌衛星之間的追蹤資料推求地球重力場，兩衛星之間分離約數百公里，處於一共同軌道面。本計畫旨在發展以距離變化率 (RR) 或距離加速度 (RRR) 計算重力場之理論及電腦程式。現有的大部分理論均含有若干的近而需更嚴密的理論。本計畫開發一套以 GRACE 資料求全球重力場之新理論及計算軟體，並以模擬七天的 GRACE 資料測試本計畫發展之理論及程式。目前已有初步成果，但仍需繼續加以改善，待取得實測之 GRACE 資料實際推求地球重力場及其時變。

關鍵字：GRACE、距離變化率 (RR)、重力場、衛星追蹤衛星、地位係數

### Abstract

Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE) is a joint US-German satellite mission to determine the earth's gravity field using satellite-to-satellite tracking data from two low-orbiters separated at few hundreds of km. GRACE had been launched in March 16, 2002 and will produce gravity signal down to a wavelength of about 310 km, and is a major improvement over the past satellite gravity missions. The aim of this project is to develop theories and computer programs for determining geopotential coefficients from either range rate (RR) from GRACE. Existing methods are based on approximations and require more rigorous treatment. Computer programs have been developed based on existing theories and improved theories. Inversion of large matrix, processing of large data set and ill conditioning will be encountered in this research and will require substantial effort in tackling these problems. Seven days simulated data from GRACE have been used to test the theories and computer programs developed in this research.

**Keywords:** GRACE, gravity, range rate, satellite-to-satellite tracking, geopotential coefficients

## 二、緣由及目的

GRACE 為美(NASA)、德(DLR)兩個單位聯合發射的衛星任務，已於 2002 年 3 月 16 日發射二顆衛星，相距 200 到 400 公里，同處於一軌道面，離地面 485 公里，為近地，近極地衛星，屬低衛星追蹤低衛星任務 (low-low satellite to satellite tracking mission)。此任務主要觀測量為兩衛星間的距離及距離變化率 (range rate)，精度可達  $1 \sim m/s$ ，且各衛星上裝設有加速儀，測定衛星受到的非引力部分 (如空氣組力、太陽輻射壓、地球輻射壓等)，並各裝設一 GPS 接收儀，測定衛星之位置及速度。

GRACE 任務主要目標是提供長達 5 年的全球高解析度、高精度的地球重力場，連續長時間的重力場測定將可產生平均地球重力場及其時間的變化，在這方面，GRACE 將繼續 CHAMP 衛星任務，而精度的提昇將可預期。

GRACE 衛星任務的應用有大地水準面認知的提昇，再結合衛星測高和地面資料，使我們在海洋學、大地測量、或固體地球科學的研究有更大的改進與助益，如海洋熱流量、長期的平均海水面變化、海洋上之熱含量、地轉流、精密定位、定軌及水準測量等。而隨時間變化之地球重力場將有助於吾人對於海洋、水文、冰河及固體地球科學隨時間變化有更多的了解，如深海中海流的變化、大規模的蒸發量、土壤濕度的變化、冰山及冰河的質量平衡、陸地上地下水及雪含量之變化、岩石及地幔密度的變化、冰原期後的復原及固體地球的均衡。本計畫目的主要開發以 GRACE 資料求全球重力場之新理論及計算軟體。因目前尚無法取得 GRACE 資料，本計畫以模擬兩顆 GRACE 衛星七天的資料進行計算分析，以評估方法之可行性。

## 三、原理及方法

### (一) 基本原理

本研究欲推求之參數為地位係數 (geopotential Coefficients)，擾動地位通常以下列球諧函數展開：

$$V_{NS}(r, W, \lambda) = \frac{\gamma}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin W) \quad (1)$$

$\bar{P}_{nm}$  為完全正規化 associated legendre function (Heiskanen and Moritz, 1985)， $r, W, \lambda$  為地心距，地心緯度，經度， $a_e$  為地球參考橢球體長軸半徑， $n$  為球諧展開最高階，對 GRACE 衛星而言， $n < 180$ 。

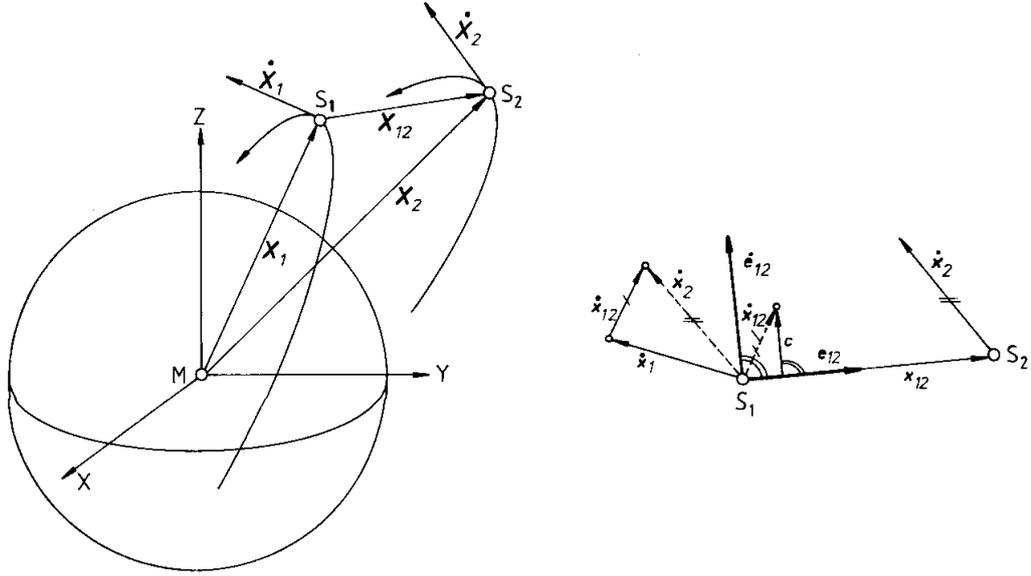


圖 1：衛星追蹤衛星之幾何關係

如圖 1，SST 任務中，兩衛星  $S_1, S_2$  同處一軌道面，相距數百公里，其間 (RANGE RATE) RR 為 (Rummel 1978)

$$\dot{\dots} = \dot{\bar{X}}_{12} \bar{e}_{12} \quad (2)$$

$\dot{\bar{X}}_{12} = \dot{\bar{X}}_2 - \dot{\bar{X}}_1$  為  $S_1, S_2$  兩衛星相對速度向量。

$$\bar{e}_{12} = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{|\bar{X}_2 - \bar{X}_1|} = \frac{\bar{X}_{12}}{\dots} \quad \text{為 } S_1 \text{ 對 } S_2 \text{ 之單位向量} \quad (3)$$

對 (2) 式作時間微分，則得相對距離加速度，即相對速度的變化 (range rate rate) 簡稱 RRR：(Reigber et al, 1987)

$$\ddot{\dots} = \ddot{\bar{X}}_{12} \bar{e}_{12} + \dot{\bar{X}}_{12} \dot{\bar{e}}_{12} \quad (4)$$

由於

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_{12} &= \frac{d(\bar{X}_{12} \cdot \dots^{-1})}{dt} = \dots^{-2} \cdot \frac{d\dots}{dt} \cdot \bar{X}_{12} + \dots^{-1} \frac{\dot{\bar{X}}_{12}}{\bar{X}_{12}} = (\dot{\bar{X}}_{12} - \dots^{-1} \bar{X}_{12} \dot{\dots}) \dots^{-1} \\ &= (\dot{\bar{X}}_{12} - \dot{\dots} \bar{e}_{12}) \dots^{-1} = C \dots^{-1} \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$C = \dot{\bar{X}}_{12} - \ddot{\dots} \mathbf{e}_{12}$$

所以

$$\begin{aligned} \ddot{\dots} &= \ddot{\bar{X}}_{12} \bar{\mathbf{e}}_{12} + \dot{\bar{X}}_{12} (\dot{\bar{X}}_{12} - \ddot{\dots} \bar{\mathbf{e}}_{12}) \dots^{-1} = \ddot{\bar{X}}_{12} \bar{\mathbf{e}}_{12} + ((\dot{\bar{X}}_{12})^2 - \ddot{\dots} \cdot \dot{\bar{X}}_{12} \bar{\mathbf{e}}_{12}) \dots^{-1} \\ &= \ddot{\bar{X}}_{12} \bar{\mathbf{e}}_{12} + ((\dot{\bar{X}}_{12})^2 - (\ddot{\dots})^2) \cdot \dots^{-1} \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\ddot{\bar{X}}_{12} = \ddot{X}_2 - \ddot{X}_1$$

為  $S_2$  對  $S_1$  之相對加速度向量， $\ddot{\dots}_{12}$  則為  $S_1$  與  $S_2$  間之視線 (line of sight) 方向加速度分量。GRACE 的直接觀測量為  $\ddot{\dots}$ ，精度達  $10^{-6}$  m/sec， $\ddot{\dots}$  則可由數值微分方法自  $\dot{\dots}$  求得。

SST 的基本原理是建立地球重力場參數與觀測量  $\dot{\dots}$  或  $\ddot{\dots}$  之間的關係，通常將展開的球諧係數  $C_{nm}$ ， $S_{nm}$  視為參數  $S_n$ ，則依據兩衛星之初始向量推出近似

值  $\bar{X}^0$ 、 $\dot{\bar{X}}^0$ 、 $\dot{\dots}^0$ 、 $\ddot{\dots}^0$ ，而重力場參數近似值  $S_n^0$ ，因此

$$S_n = S_n^0 + \Delta S_n, n=1,2,3,\dots,N$$

將(2)式線性化得

$$\Delta \dot{\dots} = \dot{\dots} - \dot{\dots}^0 = \frac{\partial}{\partial S_n} (\dot{\bar{X}}_{12} \bar{\mathbf{e}}_{12}) \cdot \Delta S_n = \left[ \bar{\mathbf{e}}_{12} \cdot \frac{\partial \dot{\bar{X}}_{12}}{\partial S_n} + \dot{\bar{X}}_{12} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}_{12}}{\partial S_n} \right] \Delta S_n \quad (7)$$

(7)式中

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}_{12}}{\partial S_n} &= \frac{\partial}{\partial S_n} \left( \frac{\bar{X}_{12}}{\dots} \right) = \frac{\partial}{\partial S_n} (\dots^{-1} \bar{X}_{12}) = \bar{X}_{12} \cdot \frac{\partial \dots^{-1}}{\partial S_n} + \dots^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{X}_{12}}{\partial S_n} \\ &= \bar{X}_{12} \cdot \frac{\partial \dots^{-1}}{\partial S_n} + \dots^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{X}_{12}}{\partial S_n} \end{aligned} \quad (8)$$

(8)式右邊中第一項

$$\bar{X}_{12} \cdot \frac{\partial \dots^{-1}}{\partial S_n} = \bar{X}_{12} \cdot (-1) \cdot \dots^{-2} \cdot \left( \frac{\partial \dots}{\partial S_n} \right)^T = -\dots^{-2} \cdot \bar{X}_{12} \cdot \left( \frac{\partial \dots}{\partial S_n} \right)^T$$

$$\begin{aligned}
&= -\dots^{-2} \bar{X}_{12} \left[ \frac{\partial (\bar{X}_{12}^T \bar{X}_{12})^{\frac{1}{2}}}{\partial S_n} \right]^T = -\dots^{-2} \bar{X}_{12} \cdot \frac{1}{2} (\bar{X}_{12}^T \bar{X}_{12})^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \bar{X}_{12}^T \frac{\partial \bar{X}_{12}}{\partial S_n} \\
&= -\dots^{-2} \cdot \bar{e}_{12} \cdot \bar{X}_{12}^T \frac{\partial \bar{X}_{12}}{\partial S_n} \tag{9}
\end{aligned}$$

將 (9) 式代入 (8) 得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{e}_{12}}{\partial S_n} &= (\dots^{-1} - \dots^{-2} \bar{e}_{12} \bar{X}_{12}^T) \frac{\partial \bar{X}_{12}}{\partial S_n} = (\dots^{-1} - \frac{\bar{X}_{12}^T \cdot \bar{e}_{12}}{\dots}) \frac{\partial \bar{X}_{12}}{\partial S_n} \\
&= (\dots^{-1} - \bar{e}_{12}^T \cdot \bar{e}_{12} \cdot \dots^{-1}) \frac{\partial \bar{X}_{12}}{\partial S_n} \tag{10}
\end{aligned}$$

(10) 代入 (7) 式之第二項，則

$$\dot{\bar{X}}_{12} \frac{\partial \bar{e}_{12}}{\partial S_n} = \dot{\bar{X}}_{12} (\dots^{-1} - \bar{e}_{12}^T \bar{e}_{12} \dots^{-1}) \frac{\partial \bar{X}_{12}}{\partial S_n} = \dots^{-1} (\dot{\bar{X}}_{12} - \dots \bar{e}_{12}) \frac{\partial \bar{X}_{12}}{\partial S_n} = \dots^{-1} C \cdot \frac{\partial \bar{X}_{12}}{\partial S_n} \tag{11}$$

(11) 式代入 (7) 式得

$$\Delta \dots = \left[ \bar{e}_{12} \cdot \frac{\partial \dot{\bar{X}}_{12}}{\partial S_n} + \dots^{-1} C \cdot \frac{\partial \bar{X}_{12}}{\partial S_n} \right] \Delta S_n \tag{12}$$

## (二) 線性化建立觀測量與未知數關係

本研究係利用 (12) 式以 GRACE 觀測量 range rate 推求地球重力場  
 式中  $\Delta \dots = \dots - \dots^0$

$$S_n = S_n^0 + \Delta S_n \quad n=1,2,3,\dots,N$$

因目前尚無法取得 GRACE 資料，因此本文模擬之 GRACE 資料是以 OSU91A 為近似值，而 EGM96 為觀測量，即

$$\Delta \dots_{12} = \dots_{12} - \dots_{12}^0$$

式中

- $\dots_{12}$  係利用 EGM96 地位係數模擬兩顆 GRACE 衛星之 range rate 為觀測量。
- $\dots_{12}^0$  係利用 OSU91A 地位係數模擬兩顆 GRACE 衛星之 range rate 為近似值。

(12) 式以向量表示如下：

$$S : \text{為待求之地位係數，即 } S = \begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix}, \Delta S = \begin{bmatrix} \Delta C_{nm} \\ \Delta S_{nm} \end{bmatrix}$$

$S^0$  :  $S$  的近似值, 本研究假設為 OSU91A 之地位係數

$\Delta S$  :  $S^0$  的改正數 , 即  $S = S^0 + \Delta S$

$$\bar{V}_{12} = \bar{V}_2 - \bar{V}_1 \quad \text{兩顆衛星的相對速度向量}$$

$$\bar{X}_{12} = \bar{X}_2 - \bar{X}_1 \quad \text{兩顆衛星的相對位置向量}$$

$$\dots = |\bar{X}_2 - \bar{X}_1| \quad \text{兩顆衛星的距離}$$

$$\bar{e}_{12} = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{\dots} = \frac{\bar{X}_{12}}{\dots} \quad \text{兩顆衛星的相對位置單位向量}$$

$$\dot{\dots} = \bar{V}_{12}^T \bar{e}_{12} \quad \text{兩顆衛星的距離變化 (range rate)}$$

$$\Delta \dot{\dots} = \dot{\dots} - \dot{\dots}^0 = \frac{\partial}{\partial S^T} (\bar{e}_{12}^T \bar{V}_{12}) \Delta S \quad \text{residual range rate}$$

$$= \left[ \bar{e}_{12}^T \cdot \frac{\partial \bar{V}_{12}}{\partial S^T} + \dots^{-1} \cdot (\bar{V}_{12} - \dots \bar{e}_{12})^T \cdot \frac{\partial \bar{X}_{12}}{\partial S^T} \right] \cdot \Delta S \quad (13)$$

$$S^T = [C_{20} C_{21} C_{22} C_{30} C_{31} C_{32} \dots C_{nm} S_{21} S_{22} S_{31} S_{32} \dots S_{nm}]$$

$$\bar{X}_i = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}, \quad i=1,2 \quad \bar{V}_i = \begin{bmatrix} \dot{X}_i \\ \dot{Y}_i \\ \dot{Z}_i \end{bmatrix}, \quad i=1,2 \text{ 為 GRACE 衛星 } 1,2$$

衛星位置、速度為克卜勒元素的函數，以向量表示為：

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{V}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_i(s) \\ \bar{V}_i(s) \end{bmatrix} \quad S = S_k, \Delta S = \Delta S_k : \text{為克卜勒元素的擾動，} k=1,2,\dots,6。$$

$S_k$  順序為  $a, e, I, \Omega, \tilde{S}, M$ ，其定義為：

semi-major axis of osculating orbital ellipse:  $a$

eccentricity of osculating orbital ellipse:  $e$

inclination:  $I$

argument of perigee:  $S$

right ascension of the ascending node:  $\Omega$

mean anomaly:  $M$

為線性化，對兩顆衛星相對速度及位置之微分分別為：

$$\frac{\partial \bar{V}_{12}}{\partial S^T} = \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial S^T} - \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial S^T} = \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial S_2^T} \cdot \frac{\partial S_2}{\partial X^T} - \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial S_1^T} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial S^T} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{X}_{12}}{\partial S^T} = \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial S^T} - \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial S^T} = \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial S_2^T} \cdot \frac{\partial S_2}{\partial S^T} - \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial S_1^T} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial S^T} \quad (15)$$

其中

$$\frac{\partial \bar{X}_i}{\partial S^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_i}{\partial a} & \frac{\partial X_i}{\partial e} & \frac{\partial X_i}{\partial I} & \frac{\partial X_i}{\partial \Omega} & \frac{\partial X_i}{\partial S} & \frac{\partial X_i}{\partial M} \\ \frac{\partial Y_i}{\partial a} & \frac{\partial Y_i}{\partial e} & \frac{\partial Y_i}{\partial I} & \frac{\partial Y_i}{\partial \Omega} & \frac{\partial Y_i}{\partial S} & \frac{\partial Y_i}{\partial M} \\ \frac{\partial Z_i}{\partial a} & \frac{\partial Z_i}{\partial e} & \frac{\partial Z_i}{\partial I} & \frac{\partial Z_i}{\partial \Omega} & \frac{\partial Z_i}{\partial S} & \frac{\partial Z_i}{\partial M} \end{bmatrix} = A_i \text{ matrix, } i \text{ 為 GRACE1, GRACE2}$$

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial S^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial a} & \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial e} & \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial I} & \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial \Omega} & \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial S} & \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial M} \\ \frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial a} & \frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial e} & \frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial I} & \frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial \Omega} & \frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial S} & \frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial M} \\ \frac{\partial \dot{Z}_i}{\partial a} & \frac{\partial \dot{Z}_i}{\partial e} & \frac{\partial \dot{Z}_i}{\partial I} & \frac{\partial \dot{Z}_i}{\partial \Omega} & \frac{\partial \dot{Z}_i}{\partial S} & \frac{\partial \dot{Z}_i}{\partial M} \end{bmatrix} = B_i \text{ matrix, } i \text{ 為 GRACE1, GRACE2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial S^T} = \frac{\partial \Delta S}{\partial S^T}$$

$\Delta S_i, i=1,2,3$  for  $\Delta a, \Delta e, \Delta I$

$$\Delta S_i = \sum_{n=2}^K \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=-Q}^Q r^{i, nmpq} S_{nmpq} = C_0^1 \Delta S \quad (16)$$

而

$\Delta S_i, i=4,5,6$  for  $\Delta \Omega, \Delta S, \Delta m$

$$\Delta S_i = \sum_{n=2}^K \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=-Q}^Q r^{i, nmpq} S_{nmpq}^* = C_0^2 \Delta S \quad (17)$$

所以  $\frac{\partial \Delta S_i}{\partial S^T} = \begin{bmatrix} C_0^1 \\ C_0^2 \end{bmatrix} = C$  ,  $\Delta S = C \cdot \Delta S$

(16)、(17) 式中

$K$  為球諧展開最高階，本研究  $K=70$ ； $Q$  值與軌道離心率有關，對近乎圓形軌道而言可令  $Q$  值為 1。(Balmino,1994)

$$S_{nmpq}(\check{S}, M, \Omega, \check{\iota}) = \begin{pmatrix} \bar{C}_{nm}^+ \\ -\bar{S}_{nm}^- \end{pmatrix} \cos[(n-2p)\check{S} + (n-2p+q)M + m(\Omega - \check{\iota})] \\ + \begin{pmatrix} \bar{S}_{nm}^+ \\ \bar{C}_{nm}^- \end{pmatrix} \sin[(n-2p)\check{S} + (n-2p+q)M + m(\Omega - \check{\iota})] \quad (18)$$

$$S_{nmpq}^*(\check{S}, M, \Omega, \check{\iota}) = \begin{pmatrix} \bar{C}_{nm}^+ \\ -\bar{S}_{nm}^- \end{pmatrix} \sin[(n-2p)\check{S} + (n-2p+q)M + m(\Omega - \check{\iota})] \\ - \begin{pmatrix} \bar{S}_{nm}^+ \\ \bar{C}_{nm}^- \end{pmatrix} \cos[(n-2p)\check{S} + (n-2p+q)M + m(\Omega - \check{\iota})] \quad (19)$$

係數  $r_{nmpq}^i$  以  $a, e, I, \Omega, \check{S}, M$  順序為：

$$r_{nmpq}^1 = 2ab\bar{F}_{nmp}G_{npq}(n-2p+q) \\ r_{nmpq}^2 = b\frac{(1-e^2)^{1/2}}{e}\bar{F}_{nmp}G_{npq}[(1-e^2)^{1/2}(n-2p+q)-n+2p] \\ r_{nmpq}^3 = b\bar{F}_{nmp}G_{npq}\frac{[(n-2p)\cos I - m]}{\sin I(1-e^2)^{1/2}} \quad (20) \\ r_{nmpq}^4 = b\frac{\bar{F}'_{nmp}G_{npq}}{\sin I(1-e^2)^{1/2}} \\ r_{nmpq}^5 = b\left[\frac{(1-e^2)^{1/2}}{e}\bar{F}_{nmp}\bar{G}'_{npq} - \frac{\cos I}{\sin I(1-e^2)^{1/2}}\bar{F}'_{nmp}G_{npq}\right] \\ r_{nmpq}^6 = b\bar{F}_{nmp}\left[2(n+1)G_{npq} - \frac{(1-e^2)}{e}G'_{npq} - 3G_{npq}(n-2p+q)\frac{\bar{n}}{\mathcal{E}_{nmpq}}\right]$$

其中

$\check{\iota}$  為格林威治視恒量時

$\bar{C}_{nm}^+$  and  $\bar{S}_{nm}^+$  為完全正規化球諧係數 n-m 是偶數

$\bar{C}_{nm}^-$  and  $\bar{S}_{nm}^-$  為 n-m 是奇數的完全正規化球諧係數

$\bar{F}_{nmp}$  為完全正規化傾角函數

$G_{npq}(e)$  為離心率函數

$$b = \frac{\bar{n}}{\mathcal{E}_{nmpq}} \left( \frac{a_e}{a} \right)^n \quad (21)$$

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \quad (22)$$

$$\mathcal{E}_{nmpq} = (n-2p)\check{S} + (n-2p+q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\iota}) \quad (23)$$

$$\bar{F}'_{nmp} = \frac{\partial \bar{F}_{nmp}}{\partial I}, \quad G'_{npq} = \frac{\partial G_{npq}}{\partial e} \quad (24)$$

(23)式中  $\dot{\iota}$  為格林威治視恆星時約等於平均地球自轉速度( $7.292115 \times 10^{-5}$  rad s<sup>-1</sup>)， $\check{S}$ ,  $\dot{M}$ , and  $\dot{\Omega}$  由下列式子計算：

$$\dot{\Omega} = \frac{3\bar{n}C_{20}a_e^2}{2(1-e^2)^2 a^2} \cos^2 I$$

$$\check{S} = \frac{3\bar{n}C_{20}a_e^2}{4(1-e^2)^2 a^2} (1 - 5 \cos^2 I) \quad (25)$$

$$\dot{M} = \bar{n} - \frac{3\bar{n}C_{20}a_e^2}{4(1-e^2)^{3/2} a^2} (3 \cos^2 I - 1)$$

其中  $C_{20}$  為二階帶諧係數 (約 -0.00108263).

將 ABC 矩陣代入 (14), (15) 式得

$$\frac{\partial \bar{V}_{12}}{\partial \mathcal{S}^T} = \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial \mathcal{S}^T} - \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial \mathcal{S}^T} = \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial \mathcal{S}_2^T} \cdot \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial X^T} - \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial \mathcal{S}_1^T} \cdot \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial \mathcal{S}^T} = B_2 C_2 - B_1 C_1 \quad (26)$$

$$\frac{\partial \bar{X}_{12}}{\partial \mathcal{S}^T} = \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial \mathcal{S}^T} - \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial \mathcal{S}^T} = \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial \mathcal{S}_2^T} \cdot \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial \mathcal{S}^T} - \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial \mathcal{S}_1^T} \cdot \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial \mathcal{S}^T} = A_2 C_2 - A_1 C_1 \quad (27)$$

則 (13) 式可寫成

$$\begin{aligned}
\Delta \dots &= \left( \bar{e}_{12}^T (B_2 C_2 - B_1 C_1) + \dots^{-1} (V_{12}^T - \dots \bar{e}_{12}^T) (A_2 C_2 - A_1 C_1) \right) \Delta S \\
&= \left( \bar{e}_{12}^T B_2 + \dots^{-1} (V_{12}^T - \dots \bar{e}_{12}^T) A_2 \right) C_2 \Delta S - \left( \bar{e}_{12}^T B_1 + \dots^{-1} (V_{12}^T - \dots \bar{e}_{12}^T) A_1 \right) C_1 \Delta S \quad (28) \\
&= H \Delta S
\end{aligned}$$

### (三) 求解地位係數

若共有  $n$  時刻之 RR 觀測量，則可得觀測方程式：

$$L + v = H \overline{\Delta S}, \Sigma_L = \hat{f}_0 P^{-1} \quad (29)$$

其中  $P$  為權矩陣， $\overline{\Delta S}$  之最小二乘解則為：

$$\overline{\Delta S} = (H^T P H)^{-1} H^T P L \quad (30)$$

$\overline{\Delta S}$  之協變方矩陣為：

$$\hat{\Sigma}_{\Delta S} = \hat{f}_0^2 (H^T P H)^{-1} \quad (31)$$

$$\hat{f}_0^2 = \frac{v^T P v}{n - u}$$

$u$  為  $\overline{\Delta S}$  未知數個數。在軌道或大地參數 (geodetic parameter) 的求解過程中，由於資料無法分布全球 (polar gap) 及混疊 (aliasing effect) 問題，會造成法方程式奇異，因此常需要對未知參數加以約制條件 (Reigber, 1989)。吾人可以透過適當的權 (weight) 組成條件方程，再與原始觀測方程式一起平差求解未知參數。在最近許多求解重力的研究中，常使用修改過的 Kaula (1966) 地位模式變方 (variances)，如下 (Reigber, 1989)：

$$\bar{f}_n^{-2} = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2) \approx 5 \times 10^{-11} n^{-4} \quad (32)$$

其中， $L_X$  為某地位模式之觀測量，權矩陣為：

$$P = \begin{bmatrix} P_\ell & 0 \\ 0 & P_X \end{bmatrix}$$

其中， $P_X = \text{diag}(\frac{1}{f_n^2})$ ，是由  $1/f_n^2$  組成的對角線矩陣。在此，吾人假設  $L$  與  $L_X$  為非相關的觀測量，因此其非對角元素為‘零’。

其實 RR 並非只是地位之函數，亦含有其他引力如 N-body、日、月引力、海潮、固體潮引力等。必須發展一套軟體以計算這些引力，而使 (13) 式為一正確函數式。非引力部分將被衛星上之加速儀 (accelerometer) 量出而在資料處理時預扣此項。但在本研究中係利用模擬資料，並無此問題。

#### (四) 高階及共振效應

在本研究中僅處理 Keplerian 線性擾動理論，由於高階的擾動並非地位係數的線性函數，本研究並未直接計算高階的擾動，又當  $\mathcal{E}_{mnpq}$  接近 0 時，會產生並

振情形，即  $\frac{|\mathcal{E}_{mnpq}|}{\dot{M}} < 0.01$  時(20) 式的係數會變的相當大，因此在本研究中當

$\frac{|\mathcal{E}_{mnpq}|}{\dot{M}} < 0.01$  時，吾人令其係數  $r_{mnpq}^i = 0$ ，因此對以上二種情形，吾人可以以下簡單的經驗公式(Colombo,1984)來處理高階擾動及共振效應：

$$\Delta \dots_{12} = a_0^i + a_1^i \cos u + a_2^i \sin u + a_3^i \sin 2u + a_4^i t \cos u + \quad (33)$$

$$a_5^i t \sin u + a_6^i t^2 \cos u + a_7^i t^2 \sin u + a_8^i t + a_9^i t^2$$

式中 t 為自參考時刻起算之時間。當然這些參數也會吸收部分初始狀態向量及力模式誤差。至於選擇多少個參數，應視實際計算測試而定，本研究選擇 10 參數。

#### 四、GRACE 資料及計算結果分析

##### (一) GRACE 模擬資料

本研究使用的資料，原希望取得 GRACE 衛星資料，因該衛星原定於 2001 年 6 月發射升空，因故延至 2002 年 3 月 16 日發射升空，至今仍未公開資料。故本研究分析之資料為利用交大研發之軌道積分程式，模擬兩顆 GRACE 衛星 7 天軌道資料，自 2002 年 10 月 4 日至 2002 年 10 月 11 日，每分鐘一筆資料（如圖 2），以 OSU91A 重力場資料為近似重力場作軌道積分，並求得兩顆衛星之距離變化率(range rate)為近似距離變化率，再以 EGM96 重力場作軌道積分，並求得兩顆衛星之距離變化率作為觀測量。模擬步驟及數據如下：

Keplerian elements	GRACE1	GRACE2
semi-major axis	6855.225 km	6855.225
eccentricity	0.002602	0.002602
inclination	89.009	89.009
right ascension of ascending node	328.097	328.097
argument of perigee	146.783	146.783
mean anomaly	141.064	143.064

(a) 利用 OSU91A 重力場係數積分得 GRACE1,2 之慣性坐標  $(X^0, Y^0, Z^0, \dot{X}^0, \dot{Y}^0, \dot{Z}^0)$

即得  $t, \bar{X}_1^0, \dot{\bar{X}}_1^0, \bar{X}_2^0, \dot{\bar{X}}_2^0$  並計算參考之 range rate

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}}_{12}^0 &= \dot{\bar{X}}_{12}^0 \cdot e_{12}^0 = (\dot{\bar{X}}_2^0 - \dot{\bar{X}}_1^0) \left( \frac{\bar{X}_2^0 - \bar{X}_1^0}{|\bar{X}_2^0 - \bar{X}_1^0|} \right) \\ &= [\dot{X}_2^0 - \dot{X}_1^0, \dot{Y}_2^0 - \dot{Y}_1^0, \dot{Z}_2^0 - \dot{Z}_1^0] \frac{[X_2^0 - X_1^0, Y_2^0 - Y_1^0, Z_2^0 - Z_1^0]}{\sqrt{(X_2^0 - X_1^0)^2 + (Y_2^0 - Y_1^0)^2 + (Z_2^0 - Z_1^0)^2}} \end{aligned}$$

(b) 利用 EGM96 地位係數積分得 GRACE1,2 之慣性坐標  $(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$

即得  $t, \bar{X}_1, \dot{\bar{X}}_1, \bar{X}_2, \dot{\bar{X}}_2$  並計算觀測之 range rate

$$\dot{\bar{r}}_{12} = \dot{\bar{X}}_{12} \bar{e}_{12} = (\dot{\bar{X}}_2 - \dot{\bar{X}}_1) \left( \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{|\bar{X}_2 - \bar{X}_1|} \right)$$

$$=(\dot{X}_2 - \dot{X}_1, \dot{Y}_2 - \dot{Y}_1, \dot{Z}_2 - \dot{Z}_1) \frac{(X_2 - X_1, Y_2 - Y_1, Z_2 - Z_1)}{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}}$$

(c) 計算殘餘 range rate (residual RR)

$$\Delta \dot{\rho}_{12} = \dot{\rho}_{12} - \dot{\rho}_{12}^0$$

(d) 組成觀測量

$$t, \Delta \dot{\rho}_{12}, \dot{\rho}_{12}, X_1, Y_1, Z_1, \dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1, X_2, Y_2, Z_2, \dot{X}_2, \dot{Y}_2, \dot{Z}_2$$

## (二) 計算結果分析

模擬之 GRACE 2 在前 GRACE 1 在後，兩顆衛星在一天當中相距 240Km~300Km 如圖 3。由圖 4 可知兩顆衛星在一天當中，其距離變化率在 -1.5m/s~2.5m/s 之間，且具有相當規律的變化，此乃是受到  $J_2$  的影響。利用 OSU91A 地位係數計算兩衛星之距離變化率  $\dot{\rho}_{12}^0$  當近似值，以 EGM96 地位係數計算兩衛星之距離變化率  $\dot{\rho}_{12}$  當觀測量，其二者之差異 ( $\Delta \dot{\rho}_{12}$ ) 如圖 5 之紅色曲線 (真值)，其差異仍有受  $J_2$  影響之規律趨勢，藍色部分是利用本文開發之理論預估之殘餘距離變化率 (predict residual rate, 理論值)，一天當中約 8 小時在振幅與頻率方面有相當程度與真值較吻合，其它時段振幅與頻率皆不吻合，由於衛星 Mean anomaly 變化相當大，嘗試從 Mean anomaly 著手解決頻率問題，振幅問題應從數值解決 ( $\mathcal{E}_{mpq}$  值太小) 或程式仍有問題。

為解決高階擾動及共振效應，本文以經驗公式，利用 5 參數及 10 參數來修正殘餘之距離變化率，其修正後殘餘距離變化率之振幅與理論值吻合程度均較未修正前吻合程度為佳，且以 10 參數修正較 5 參數修正為佳，如圖 5、圖 6，但最後三小時有相位偏移現象，本研究仍有改善的空間。

## 五、結論

本研究以模擬 GRACE 資料發展一套推求全球重力場之新理論及計算軟體，目前已有初步成果，但電腦程式若干細節有待進一步改善，並將以實測之 GRACE 資料驗證理論及程式，推求地球重力場及其時變。

本研究具體之成果有：

- 1、完成以 GRACE 資料求全球重力場之新理論及電腦程式。
- 2、本研究結果將發表於 2002 年 12 月舉行之中外太空-空間科技研討會 ([www.sgrc.ncku.edu.tw](http://www.sgrc.ncku.edu.tw)) 及國外 SCI 期刊。
- 3、本研究為博士生博士論文的重要部分，將繼續研究並以實測之 GRACE 資料推求局部地區重力場、全球重力場及其時變，正式加入 GRACE 科學研究團隊。

## 六、參考文獻

- 1、Balmino G., F. Perosanz, R. Rummel, N. Sneeuw, H. Sünkel, and P. Woodworth. 1998. European views on dedicated gravity field missions: GRACE and GOCE. ESA Rep. ESD-MAG-REP-CON-001.
- 2、Heiskanen, W.A., and Moritz H., 1985. Physical Geodesy, reprint, Inst. of Physical Geodesy, TU Graz, Austria, 364 pp.
- 3、Hwang, C., 2001. Gravity recovery using COSMIC GPS data: application of orbital perturbation theory, J. Geod., in press.
- 4、Jekeli, C., 1999. The determination of gravitational potential differences from satellite-to-satellite tracking, Cel. Mech. Dyn. Astr., 75, 85-101.
- 5、Lemoine, F. G., et al., 1998. The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96, NASA Tech. Pap., NASA/TP-1998-206861, 575 pp.
- 6、Rummel, R., 1980. Geoid heights, geoid height differences, and mean gravity anomalies from low-low satellite-to-satellite tracking—an error analysis, Rep. No. 06, Dept of Geod. Sci., Ohio State University, Columbus.
- 7、Tapley, B., and C. Reigber, 2000. The GRACE mission: status and future, Amer.

Geophys. Union, Suppl., 81, F307.

8、Visser, P., 1999, Gravity field determination with GOCE and GRACE, Adv. Spa. Res., 23 (4), 771-776

9、Wagner, C.A., 1983. Direct determination of gravitational harmonics from low-low GRAVSAT data, J. Geophys. Res., 88, 10309-10321.

10、Wolff, M., 1969. Direct measurement of the earth's gravitational potential using a satellite pair, J. Geophys. Res., 74, 5295-5300.

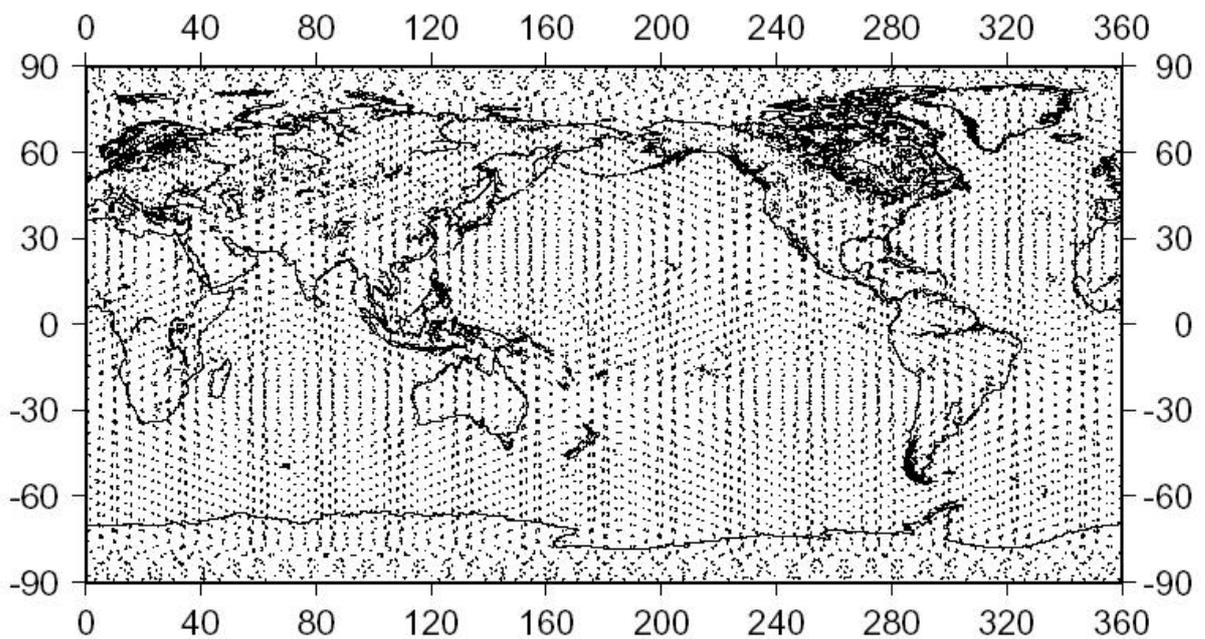


圖 2 模擬的 GRACE 1 衛星七天的軌跡

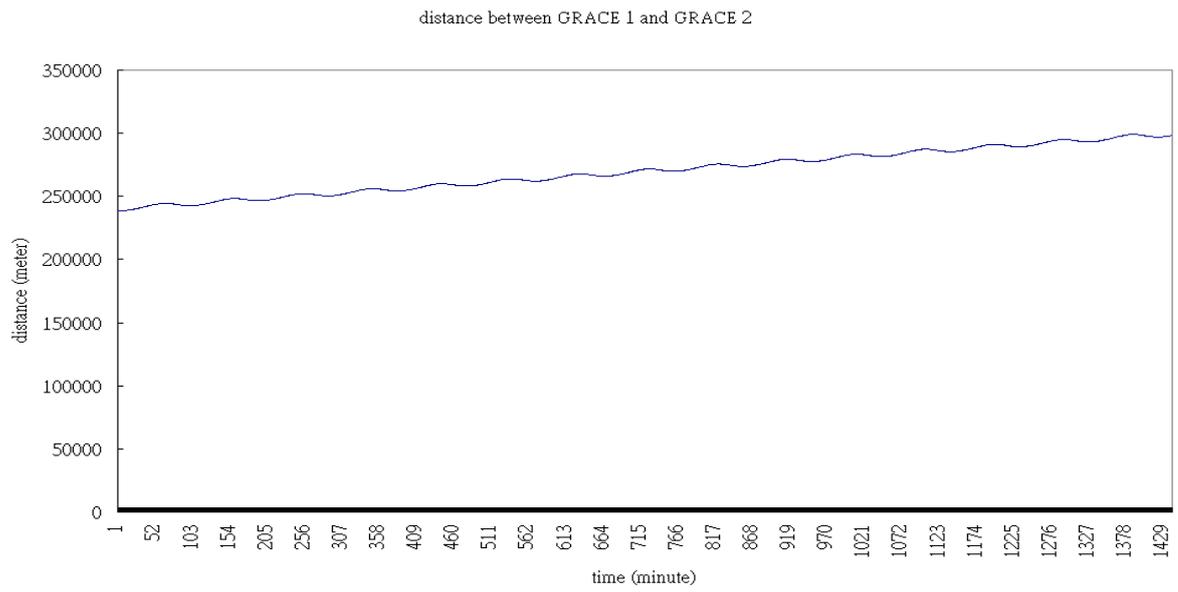


圖 3 模擬一天 GRACE 1 和 GRACE 2 兩衛星的距離

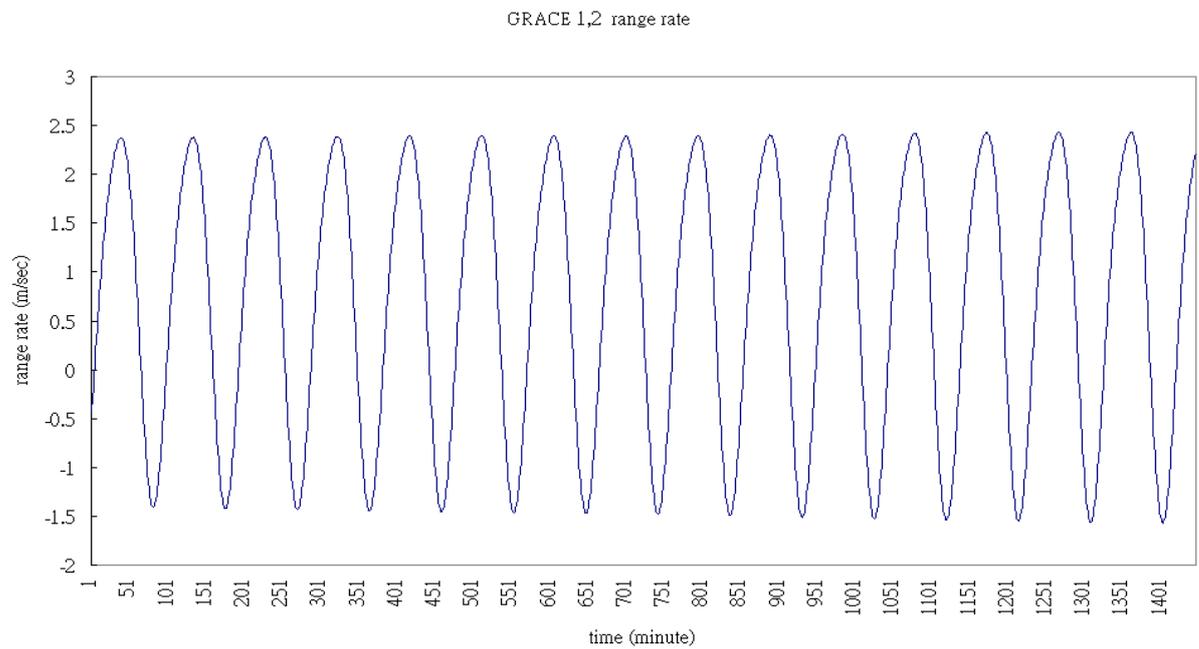


圖 4 利用 EGM96 地位係數模擬之 GRACE 1、GRACE 2 軌道之距離變化率  
(rangr rate,  $\dot{r}_{12}$ )

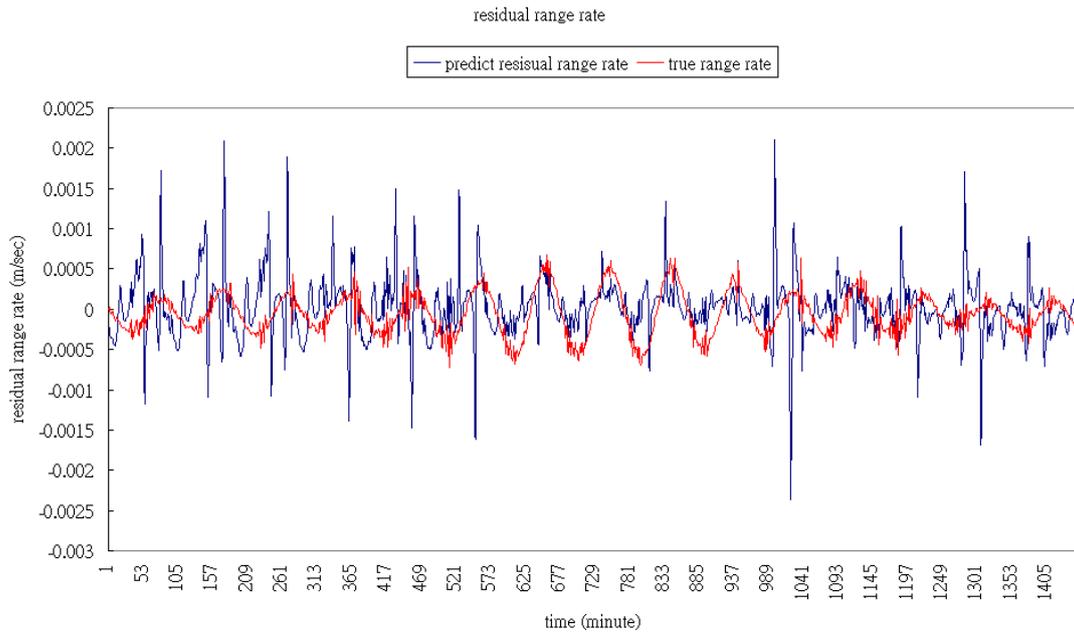


圖 5 利用 EGM96 和 OSU91A 地位係數模擬之 GRACE 1、GRACE 2 軌道之距離變化率差異 (residual rangr rate,  $\Delta \dot{r}_{12}$ ) 與本文理論預估之距離變化率差異的比較

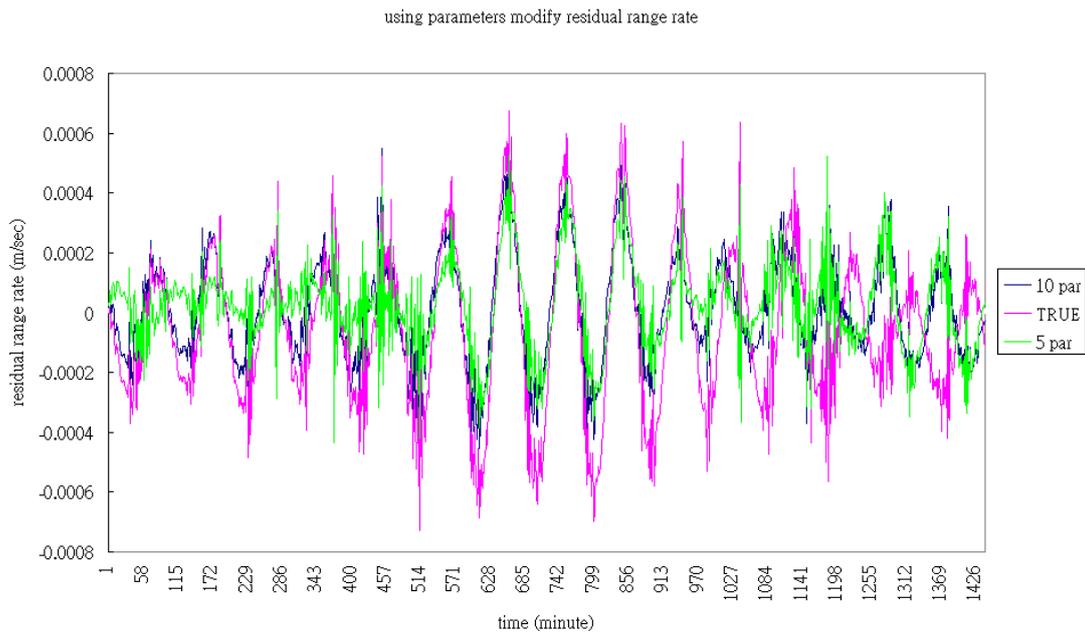


圖 6 利用經驗公式 10 參數、5 參數修正 residual rangr rate 與修正前之比較