

桁架式三明治複合材料構件的研製 (I) -總計畫

計畫編號：NSC 90-2212-E-009-057

執行期間：90年08月01日至91年07月31日

主持人：金大仁教授

國立交通大學機械系

一、中文摘要

本計畫將應用理論和實驗的方法來研究桁架式複合材料三明治板件的力學行為。在第一年的驗究中，將建立分析三明治板件動態行為的方法，此法是根據多層一階變形理論推導而得，應用本方法預測三明治板件的頻譜響應，並與實驗結果作比較。

關鍵字：複合材料，三明治板，結構力學，振動，頻譜響應。

Abstract

In this project, the mechanical behaviors of truss-type laminated composite sandwich plates are studied via both theoretical and experimental approaches. The dynamic responses of the laminated composite sandwich plates are predicted using the deformation modal derived on the basis of the layerwise linear deformation theory. Vibration experiments are performed and the results used to validate the proposed method.

Keywords: Composite materials, sandwich plate, structural mechanics, vibration, frequency response.

二、緣由與目的

桁架式複合材料三明治板有重量輕、剛性大和強度高的優點，並具有廣泛的用途。一般研究複合材料三明治板的振動時，只考慮低頻的響應，甚少探討寬頻的振動行為，因而使用一般常用的分析方法恐無法準確預測三明治板再高頻振動時的行為。本研究將用里茲方法，假設合適的變形函數，並根據漢米頓原理推導三明治板的控制方程式。另外，進行三明治板的振動實驗，並比較實驗與理論結果之差異。

三、三明治板的振動分析

本研究主要運用多層一階剪變形平板理論配合Rayleigh-Ritz方法求解板的自然頻率和模態。

3.1 多層一階剪變形平板理論

由於複合材料三明治層板面層與夾心層間材料性質差異很大，而且面層是由不同纖維方向的複合材料層板所組成，因此面層與夾心層間在同一方向的勁度會有很大的差異。所以，複合材料三明治層板沿整個厚度方向的位移，並不如一階剪變形位移場平板理論所假設的整個板厚為斜率相同的直線。故我們將整個複合材料板每一層當做一個一階剪變形位移場，並且考慮每一層與層間位移的連續性，如此沿平板整個厚度方向的位移會形成許多不同斜率的線段所組成的折線。然後即以此位移場為基礎，分析複合材料三明治層板的自然頻率和模態。

多層一階剪變形平板理論是將複合材料三明治層板的每一層當作一個一階剪變形的平板來分析。假設層板任一層的位移場為

$$\begin{aligned} u^{(k)} &= u_0^{(k)}(x, y) + z^{(k)} w_x^{(k)}(x, y) \\ v^{(k)} &= v_0^{(k)}(x, y) + z^{(k)} w_y^{(k)}(x, y) \\ w^{(k)} &= w_0^{(k)}(x, y) = w^{(k)}(x, y) \\ (k &= 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (1)$$

本文中將層數設為三層，依據上式，並考量每一層於交界面上的位移必須連續，可得每一層的位移場。

3.2 複合材料層板的應變能與動能

考慮任一個單層複合材料層板，應變能可表示為

$$U_p^{(k)} = \frac{1}{2} \int_V [f^{(k)}]^T [v^{(k)}] dV \quad k=1, 2, 3 \quad (2)$$

應用上式，可求得 $U_p^{(1)}$ 、 $U_p^{(2)}$ 及 $U_p^{(3)}$ ，複合材料層板彎曲的應變能為

$$U_p = \sum_{k=1}^3 U_p^{(k)} \quad (3)$$

對於在平板邊界上有彈性支承的情況(如圖1)，由橫向(translational)及旋轉彈簧所引起的應變能表示為

$$\begin{aligned} U_t &= \frac{f_1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} w^2 \Big|_{x=-a/2}^{x=a/2} dy + \frac{f_2}{2} \int_{-b/2}^{b/2} w^2 \Big|_{x=a/2}^{x=-a/2} dy \\ &\quad + \frac{f_3}{2} \int_{-a/2}^{a/2} w^2 \Big|_{y=-b/2}^{y=b/2} dx + \frac{f_4}{2} \int_{-a/2}^{a/2} w^2 \Big|_{y=b/2}^{y=-b/2} dx \\ U_r &= \sum_{k=1}^3 \left[\frac{X_1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} (w_x^{(k)})^2 \Big|_{x=-a/2}^{x=a/2} dy + \frac{X_2}{2} \int_{-b/2}^{b/2} (w_x^{(k)})^2 \Big|_{x=a/2}^{x=-a/2} dy \right. \\ &\quad \left. + \frac{X_3}{2} \int_{-a/2}^{a/2} (w_y^{(k)})^2 \Big|_{y=-b/2}^{y=b/2} dx + \frac{X_4}{2} \int_{-a/2}^{a/2} (w_y^{(k)})^2 \Big|_{y=b/2}^{y=-b/2} dx \right] \end{aligned} \quad (4)$$

這裡 f_n 為平板四邊的橫向剛性(translational stiffness)， X_n 為平板四邊的旋轉剛性(rotational stiffness)。

如果一彈簧 k_0 作用在板(a' , b')上，可將此彈簧的應變能表示為

$$U_0 = \frac{k_0}{2} w^2(x, y) \Big|_{(x=a', y=b')} \quad (5)$$

總應變能 U 為複合材料層板彎曲的應變能(U_p)、彈性支承引起的應變能(U_t 、 U_r)及板內彈簧 k_0 的應變能(U_0)總和。

$$U = U_p + U_t + U_r + U_0 \quad (6)$$

每一單層板的動能為

$$\begin{aligned} T^{(k)} &= \frac{\rho^{(k)}}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial u_0^{(k)}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0^{(k)}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy \\ &\quad + \frac{I^{(k)}}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial w_x^{(k)}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_y^{(k)}}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy + T_0 \end{aligned} \quad (7)$$

其中 T_0 為集中質量的動能，應用上式可求得 $T^{(1)}$ 、 $T^{(2)}$ 及 $T^{(3)}$ ，複合材料三明治板的最大動能為

$$T = \sum_{k=1}^3 T^{(k)} \quad k=1, 2, 3 \quad (8)$$

複合材料層板的總能量泛函 Π 可表示為

$$\Pi = U - T \quad (9)$$

3.3 雷利-里茲法(Rayleigh-Rize method)

在本文中，我們假設的撓度函數(deflection function)及橫切面轉角函數(cross-sectional rotation function)共有七個分別是 w 、 $w_x^{(1)}$ 、 $w_y^{(1)}$ 、 $w_x^{(2)}$ 、 $w_y^{(2)}$ 、 $w_x^{(3)}$ 及 $w_y^{(3)}$ ，每一個函數可表示為兩多項式函數的相乘，以 w 為例可表為

$$w(\zeta, \eta) = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{j_1=1}^{J_1} C_{i_1 j_1}^{(1)} \Phi_{x_{i_1}}(\zeta) \Psi_{y_{j_1}}(\eta) \quad (10)$$

其中 $C_{i_1 j_1}^{(1)}$ 為未定係數， ζ 、 η 為無因次參數，且 $x = a\zeta$ ， $y = b\eta$ ， Φ_x 、 Ψ_y 係由

Gram-Schmidt 正交化法所產生的多項式函數。以 Φ_x 為例：

$$\Phi_{.xn+1}(\zeta) = (\zeta - \Theta_n)\Phi(\zeta) - \Xi_n\Phi_{.xn-1}(\zeta),$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, m \quad (11)$$

其中

$$\Theta_n = \frac{\int_{-0.5}^{0.5} \zeta \Phi_{.xn}^2(\zeta) d\zeta}{\int_{-0.5}^{0.5} \Phi_{.xn}^2(\zeta) d\zeta},$$

$$\Xi_n = \frac{\int_{-0.5}^{0.5} \Phi_{.xn}^2(\zeta) d\zeta}{\int_{-0.5}^{0.5} \Phi_{.xn-1}^2(\zeta) d\zeta}$$

這裡 $\Phi_{.x0}$ 定義為零，令 $\Phi_{.x1}(\zeta) = 1$ 及 $\Psi_{.y1}(\eta) = 1$ 。

為求未定係數，令

$$\partial \Pi / \partial C_{ij} = 0 \quad (12)$$

可得一典型的特徵值方程

$$(\mathbf{K} - S^2 \mathbf{M})\{\mathbf{C}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (13)$$

求解上式即可得到複合材料層板振動的自然頻率 S 及振型。

四、振動試驗

在振動試驗上使用的設備包括頻譜分析儀(3560C)、激振器、加速度計，在實驗前先在試片上繪出適當的激振位置及加速度量測位置，將試片固定於夾具中，連接激振器(如圖 1)、頻譜分析儀、加速規。實驗進行時先由頻譜分析儀產生一掃頻(Sweep Sine)訊號，送入激振器以激振試片，並以加速規量測試片之振動訊號傳給頻譜分析儀，分析儀利用快速傅立葉轉換求得複合材料三明治層板的頻率域響應。

本研究中我們以三層(45°/-45°/45°)的 Carbon/Epoxy (C/E) 複合材料積層板來進行實驗，將激振器與加速度計皆置於平板中央(0,0)，量測結果如圖 2 所示。其中，部分模態因激振器

與加速度規置於該模態的節線上，所以無法測出。若要量測全部的模態則必須將激振器更換不同位置。

五、結果與討論

本研究以雷利-里茲法來分析複合材料積層板的自然頻率，並與實驗結果比較其差異。文中我們以三層(45°/-45°/45°)的複合材料積層板來進行模擬。簡化模型如圖 3 所示。

首先，將激振器與加速度計皆置於平板中央(0,0)，以簡化模型分析複材層板之自然頻率及振型，自然頻率如表 1 所示，振型如圖 4 所示。並與測試結果作一比較列於表 1，最大誤差為 7.43%。

為量測全部的模態，變更激振器與加速度計位置，分別進行量測，並與數值分析結果列於表二。由以上實驗與分析結果可知：

- (1) 變更激振器與加速度計位置，會改變各個模態的頻率，以表列的前四個模態，分析及實驗的改變比例最大約為 8%，所以激振器與加速度規的質量對實驗量測有很大的影響。
- (2) 里茲法分析的結果與實驗相比，最大誤差為 8.29%，所以可驗證此一分析模型及方法，確可用於預測桁架式複合材料三明治板的頻譜響應。

圖 (1) 含激振器與彈性支承複材板的實驗設置

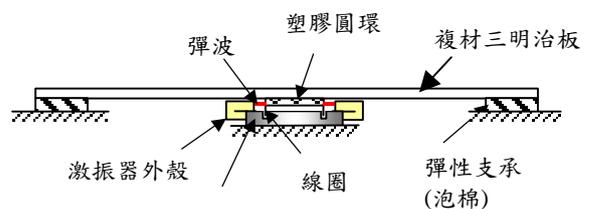


圖 (2) 實驗量測之自然頻率

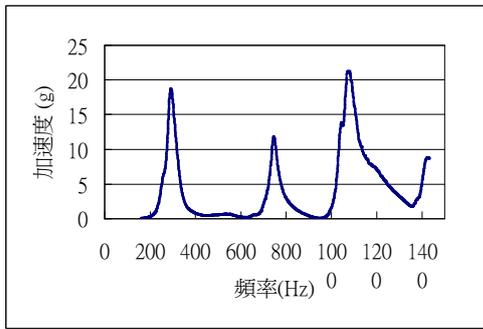


圖 (3) 以雷利-里茲法模擬的簡化模型

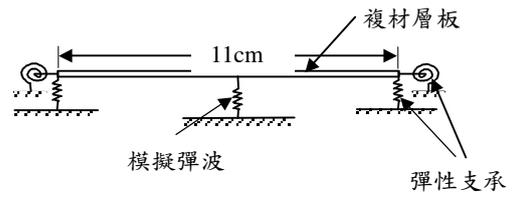


圖 (4) 激振器與加速度計皆置於平板中央之振型

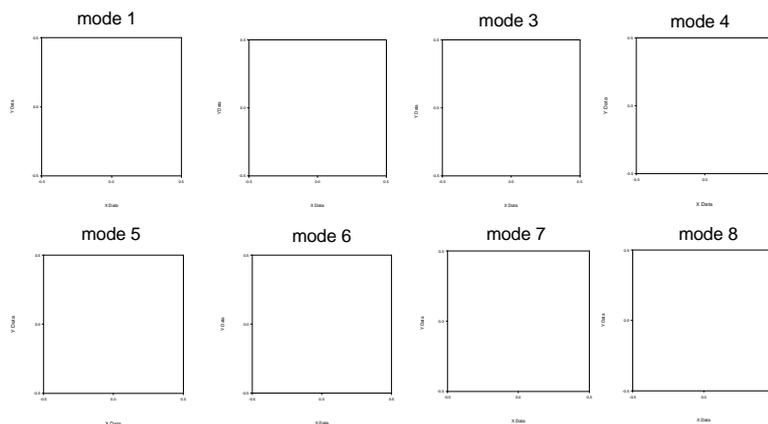


表 1 激振器與加速度計皆置於複材層板中央之自然頻率

頻率(Hz)	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6	Mode 7	Mode 8
分析	302.09	498.96	657.42	694.36	992.36	1014.54	1014.58	1267.53
實驗	294	— ^b	—	746	—	—	1080	—
誤差 ^a	-2.68%	—	—	7.43%	—	—	6.45%	—

a: (實驗 - 分析) / 分析

b: 激振器在此振型的節線上，無法測得

表 2 激振器在不同位置時，實驗及模型一分析複材層板之自然頻率

頻率(Hz)		激振器與加速度計位置				頻率最大 改變量	頻率最大 改變比例
		0,0	2,2	1.5,1.5	2,-2		
mode1	分析	302.09	296.55	298.77	292.17	9.9	3.29%
	實驗	294	273	274	271	23.0	7.82%
	誤差	-2.68%	-7.94%	-8.29%	-7.25%	—	—
mode2	分析	498.96	498.96	498.96	457.70	41.3	8.27%
	實驗	—	—	—	445	—	—
	誤差	—	—	—	-2.77%	—	—
mode3	分析	657.42	570.42	586.69	657.42	70.7	10.76%
	實驗	—	568	590	—	22	3.73%
	誤差	—	-0.43%	0.56%	—	—	—
mode4	分析	694.36	725.84	722.29	673.28	52.6	7.24%
	實驗	746	—	—	685	61	8.18%
	誤差	7.44%	—	—	1.74%	—	—