

國科會計畫成果報告 高中數學創造力的訓練活動—寫作篇

計畫編號：NSC 89-2511-S-009-025 執行期限：89年8月1日至90年7月31日

陳福祥 國立交通大學, 應用數學系 fsptsen@cc.nctu.edu.tw

Keywords: 創造力, 排列組合, 高中數學, 訓練與評估

摘要: 依創造力教育原理, 藉在高中課上設計, 實行, 訓練, 評估數學寫作創造力的活動

1 研究緣起 數學是科學發展的重要根基, 許多科學知識的發展, 常需以數學理論為其建構的基礎。我們都知道數學其實是可以相當生活化的。數學的推理及邏輯的思考解決問題的能力, 能幫助個人進行思考、批判、決策等認知活動, 進而協助個人解決日常生活上所遭遇的問題。一般在數學教學活動中, 教師常試圖教導學生特定的解題策略, 以協助學生提升解題能力。但研究顯示, 學生雖然學會解題策略, 卻不懂的如何有效的靈活運用(Lester, 1983; Schoenfeld, 1985)。因為教學中常忽略了提高人的本質為目標的更崇高理想。聖經中第一頁就指明: 人是照著神的形象被造的。聖經中第一句話就說「起初 神創造天地」。創造思考是人的天賦, 也是促進社會進步的原動力。美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics) 在 1989 年所公布的數學課程與評量標準中, 揭示五項教育目標(NCTM, 1989): 1. 使學生重視數學的價值。 2. 有信心去做數學。 3. 具備解決數學問題的能力。 4. 能做數學的溝通能力。 5. 具備數學推理的能力。 總括了人對自己、對別人及對事全方位的指標。在 Andrews(1997)的數學教育研究中, 認為能讓學生享受做數學樂趣最好的途徑, 便是在教室中鼓勵真誠純正的討論, 讓學生真正參與學習。近年來, 國內開始朝向多元入學方案的改革, 因此研究者朝著對數學教育的目標與熱誠, 期望能設計出許多具有啟發學生數學創造力的數學學習活動。使此活動能融入課堂教學之中, 讓學校教師能帶動學生對數學問題的深思、辯證、推理及數學溝通的風氣。容許以更寬容的角度、更多元化的價值, 來培養學生在數學方面的創造能力。本研究是第一年是以高中三角為題材研究如何開發出活潑的創意解題環境。第二年是三角相關作品為創造力標的研究創造力的評估。本年是以研究高中排列組合實際教材, 設計出以寫作為創造力訓練與評估的活動。

2 研究目的 英國科學家 Hoyle 即指出:「今日不重視創造思考的國家, 明日將淪為落後國家而蒙羞。」(Hullfish & Smith, 1961; 張玉成, 民 72)。我國教育部近年來也積極推展創造思考教學以改進教材教法, 但是至今並無一個明確的方法來加強學生的數學創造思考訓練。因此, 在為求能配合高中數學科的教學及幫助高中老師在創造思考教學的教材教法之下, 積極推展以訓練學生創造思考為目標的教學方法。本研究之研究目的如下:

一、參考國內外相關文獻, 探討能引發高中學生數學創造力、學習動機的活動之設計原則。二、設計出一個能引發高中學生數學創造力的學習活動。三、以質化與量化並行的方法, 探討高中學生在此數學創造力學習活動中所展現的數學創造力。四、以所設計的引發數學創造力活動來探討高中學生數學創造力的訓練成效。

3 高中數學創造力的活動

Sternberg 和 Lubart(1995)認為一個鼓勵和看重創造力的環境對創造力是有利的。Amabile 和 Gitomer(1984)發現, 小孩若能選擇材料, 對他的創意有正面的幫助。Koestner(1984)則發現, 限制越多, 創造力就越下降。因此如何去營造一個有利的數學創造力環境, 則是研究者要踏出的第一步。

3-1 創造力活動(也是數學習題)的的設計原則 本研究擬設計一個數學學習的活動, 希望藉由此活動來引導激發學生的數學創造力及學習動機, 讓學生能充分發揮多元化的天份, 期望學生能從活動中培養收集資料的經驗, 同時促使同學相互學習、相互討論機會, 綜合上述文獻, 本研究設計數學創造力活動的策略包含以下幾點: 1. 所設計的數學創造力活動要與數學課程內容範圍有相關性 (domain relevance, Amabile, 1997), 以數學定理、定義為基礎, 讓學生思考進一步如何彈性運用這些數學素材。2. 所設計的數學創造力活動要在模擬似真的情境中 (authentic environment, Roth, 1997), 讓學生的創意及想像力與真實生活連結, 使學生體會學習數學不只是課本上的運算或應付考試而已, 而是與生活經驗息息相關的。3. 允許學生能自由創作 (creativity inducement, Amabile,

1996)，並注重學生對數學問題的思考過程，及過程中遇到問題的解決方式。4.所設計的數學創造力活動要能提升學生學習數學的動機(motivation enhancement, Amabile, 1997)，經由同學互相討論的過程，讓學生內發地喜愛數學，不只是以數學為取得其他利益的工具。

3-2 高中數學-排列組合-的數學創造力活動設計 根據第 3-1 節中設計的法則及美國數學教師五項新的數學教學目標之下，研究者以高中數學課本的習題為基準，設計了一個數學創造力的活動，讓學生從作業的寫作活動中展現數學創造力。而此活動則是在每一次課本習題作業中，由研究者選取其中一個題目或對課本習題加以修改、設計。研究者為避免影響學生對問題的思考模式，特別請學校老師在上課的課程設計中，先避開與所選取題目同一思考類型的問題。研究者期望學生能從此作業方式中增加其數學學習動機及展現其數學創造力。

3-4 數學習題的選取 研究者依據前述數學習題題目的選取原則之下，逐次設計選取了以下三題，期望學生在作答時，能包含以下幾點：(1)嘗試過的錯誤描述。(2)自己設計的小實驗之描述。(3)解釋所求答案的正確理由。(4)描述本習題中所引發的新問題、創見或推廣的結果。(5)最後的歸納總結。(6)作業過程中的甘苦談或心得。(7)引用的參考資料出處，或與人討論得到的幫助內容。以下(A)、(B)及(C)部份分別為習題一、習題二及習題三的題目及選取時的考量要素。參考附錄一。

3-5 創造力評量的項目與準則 研究者依據 Amabile; Sternberg 兩人的創造力的理論所做的一個相關圖。



1.Amabile(1996)所提出的學科領域中具有創造力成果需有三個要素，即需具備與學科領域相關的技能(Domain-relevant skills)、創造力相關的技能(Creativity-relevant skills)、和工作動機(Task motivation)。

2.Sternberg(1991)所提出的引發創造力有六項個人資源中的知識、智慧、思考型態、人格特質及動機等。原則來設計評量的項目。依上圖架構來設計評量的項目，總共設計了 15 項的評量準則項目。參考附件。

4 研究方法

4-1 受試對象:受試者為新竹市國立某中學高中二年級的學生一班，受試者共有 38 位。這些學生的成績非常優異，且大部份來自於高科技、高收入及高學歷背景的家庭。選取該校學生的原因是因為該校的教學政策多元化，教師的教學教材也傾向多元的設計，且學生學習的氣氛很融洽，可充分配合研究者的設計活動。

本研究在量的分析部份，樣本的選取是上述 38 位學生。而質的分析部份，樣本的選取則是從這 38 位學生中選取出代表性的 6 位來做分析說明。

4-2 活動流程:實施時間在西元 2000 年 2 月 25 日至 4 月 30 日，此活動配合教師的上課進度，並依照上課進度在所給的高中課本習題作業中安排一個題目。

4-3 評量方式:本研究的評量者有二位。一位是大學數學系教授，另一位則是數學系有受過中等教育教師訓練的研究生。這二位評估者經充分討論後，訂定出評估數學創造力的規準，並依照所設計的高中數學創造力評分表來評估學生的數學創造力。創造力的每一個評量項目以『李克氏五點評定量表』

4-4 資料分析:本研究資料處理採用質化與量化的分析方式。其中量化的方式，以 SPSS 統計套裝軟體為分析工具，資料分析方法有樣本次數分配、百分比、平均數分析與皮爾森相關。另外評分者的信度則使用 Spearman 的等級相關係數來計算。質的分析是研究者將依據學生實際作業中所呈現的分析能力、歸納能力、推廣能力、以多種角度來解題的能力、參與動機及冒險、堅毅特性等來作分析。

5 研究問題與結果

本研究的問題與結果分點陳述於下：

一. 在數學創造思考作業的評量中，可否評量出具有數學高創造力的學生？

答:統計上可行.下表 7-1-1 為學生在習題一中，評量者所評量的每項分數與評量者評量 15 項相加總分的相關係數。表中顯現出除了評量者一的第 15 項達到.05 顯著水準外，其餘 14 項中評量者一與評量者二所評量的每一項均與評量總分達到.01 的顯著水準。表 7-1-2 為學生在習題二中，除了評量者一的第 3 項、第 10 項及第 14 項和評量者二的第 14 項未達顯著水準外，其餘皆能達到顯著水準。表 7-1-3 為學生在習題三中，除了評量者一的第 5 項、第 8 項及第 9 項等三項未達顯著水準外，其餘皆能達到顯著水準。這些結果顯示出兩位評量者在針對數學創造力評量時，確實能夠依據評量項目去評分，並區分出有、無創造力的學生，

也即是說兩位評量者依據此評量原則是可評量出具有數學創造力的學生。

二. 在做數學創造思考作業的過程中，可否看出學生的數學創造力？

答:肯定且很多元取向. 研究者認為在做數學創造思考作業的過程中，確實可看出學生的數學創造力。研究者在此列舉出學生 A 在習題一中的作業(如圖 7-2-1 至圖 7-2-5)。選擇學生 A 的習題一作業來做說明的原因乃在於兩位評量者對此學生習題一的評量分數，與其他學生比較而言，是有著較高的評分之因素。學生 A 為一位女生，其習題一作業在評量者一中總分得 59 分(平均數=39.0789，標準差=10.7311)，在評量者二中總分得 67(平均數=45.9211，標準差=8.1187)。以下研究者將以量的分析及質的分析來加以說明。

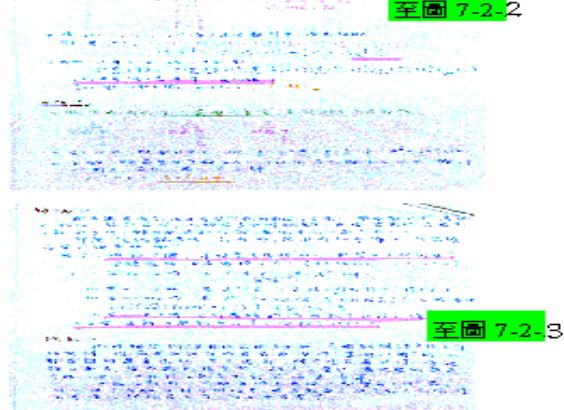
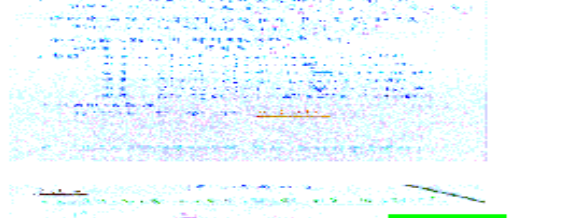
量的分析部分：下表 7-2-1 為兩位研究者對此學生作業所評的分數狀況。從表中可以看出此位學生在所有 15 項評量項目上的得分分數皆在平均數以上，除了評量者一在第 15 項評分數小餘平均數外。這說明了評量者確實可以從 38 份作業中看出具有數學創造力的學生。

質的分析部分：以學生 A 的整份作業(如圖 7-2-1 圖 7-2-5)來看，

評量者	1	2	3	4	5	6	7	8
評量者一	.436**	.362**	.702**	.622**	.659**	.696**	.614**	.814**
評量者二	.525**	.111**	.181**	.441**	.813**	.595**	.094**	.595**

評量者	9	11	11	12	13	14	15
評量者一	.541**	.322**	.742**	.777**	.562**	.502**	.302**
評量者二	.721**	.324**	.568**	.813**	.511**	.526**	.526**

評量者	1	2	3	4	5	6	7	8
評量者一	.622**	.677**	.227**	.608**	.676**	.264**	.264**	.264**
評量者二	.771**	.677**	.705**	.708**	.755**	.514**	.514**	.514**



三. 在做數學創造思考作業的過程中，可否可看出學生的數學學習動機？

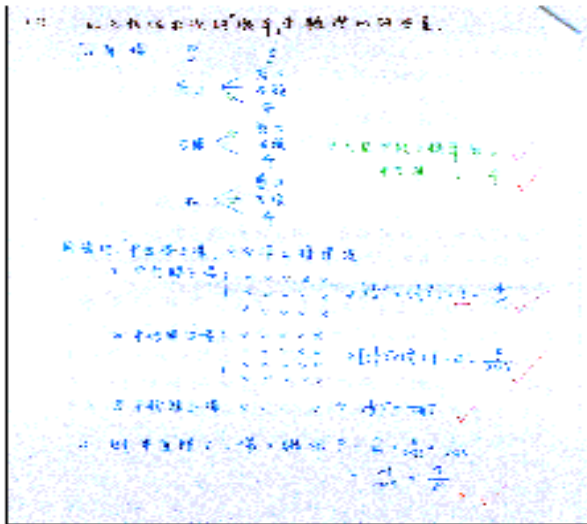
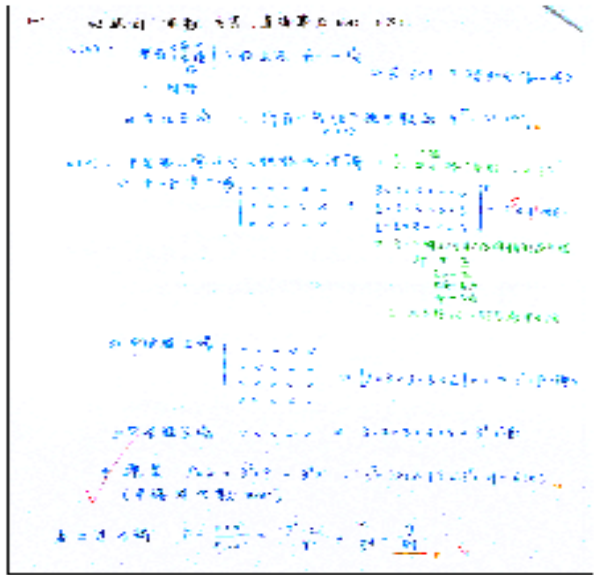
答: 肯定且很多元取向.探討此問題的原因在於研究者深信一個好的活動設計一定要有同學的熱心參與。因此如果學生對此作業能有較好的參與動機，研究者在做評量時，必能夠評量到評量表中所設計的評量項目。以下研究者將以學生所做的數學學習動機問卷及評量者從學生作業中所評量出來的動機做說明。(參考圖表)

四. 經歷了三次數學創造思考的作業可否增加其數學創造思考能力？

答: 部分肯定. 在研究者所訂定的數學創造力活動的設計原則之下，研究者認為學生在數學創造力方面確實是可訓練的。以下研究者將舉兩位同學(學生 B 及學生 C)的三次習題作業來做比較，以更進一步的說明數學創造力是可訓練的。(參考圖表)

五. 在本研究所設計的作業中，數學創造力的評定是否可信？

- (1) 兩位評分者在數學創造力評分標準上的評分是否有高相關？答:統計上可行.(參考表一)
- (2) 評分信度如何？ 答:統計上可行.(參考表一)
- (3) 兩位評分者評分間差異的原因？ 答:統計上可行.(參考表一)



6 結論與建議

結論部份：本研究發現在「高中數學-排列組合-的創造力活動」中，學生(1)能對乘法定理及排列、組合觀念的瞭解。(2)能有條理的對問題作分類。(3)能針對問題歸納出一些結論。(4)能將問題再做適度的改變。(5)在做數學習題過程中,能發現自己錯誤的地方並修正它。(6)能以合理的理由來論述所求得結論是正確的。(7)有良好的學習動機展現。(8)會自己做假設,並求出結果。(9)會設計自己的實驗,並驗證自己的想法。(10)會嘗試從各種角度的想法來嘗試解題。所以此「高中數學-排列組合-的創造力活動」確實能引發學生的數學創造力,並且還可以藉此評量出學生的數學創造力及從做習題中看出具有數學創造力的學生。

過去研究不是針對一個人的創造力多寡來評量-威廉斯創造力測驗,就是針對研究音樂、藝術的創造力- Amabile(1982)將藝術天賦的創造力共分成 23 個項目來評量,很少有針對數學創造力來研究的,特別是高中數學。因此本研究參考國內外相關文獻,設計出一個能引發高中學生數學創造力、學習動機的活動之四項設計原則。然後依此原則探討能引發高中學生數學創造力的學習活動。研究者並實際以高中生來做實驗,以質化與量化並行的方法,探討高中學生在此數學創造力學習活動中所展現的數學創造力。

而對於整體數學創造力的訓練成效,雖然說訓練的成效不見得有很明顯大幅度的成長,但研究結果顯示學生在三次習題中,在對問題分析、做推廣、做歸納、小實驗的設計及以多種方法來解題等都有明顯的進步。因此研究者深信以長遠的角度來看,學生在經過長期的訓練之下,學生必能朝向 NCTM(1989)所設立的五項數學教育目標,即是「重視數學的價值」、「有信心去做數學」、「具備解決數學問題的能力」、「能做數學的溝通能力」及「具備數學推理的能力」,使得學生在數學的創意思考能力上有明顯的進步。

建議部份： 因此基於本研究結果，有 6 點建議如下：1. 未來在高中數學教學上，教師能參考研究者所提的四項設計原則，即學科相關性、模擬似真的情境中、自由創作、提升學習數學的動機，設計出類似可引發數學創造力及動機的活動。 2.就研究的推論範圍 (generalizability) 而言，本研究受試學生之數學天賦、一般成績都不錯，因而本研究成果未來是否能普及到程度中等的學生，尚待進一步研究。 3.研究受試者是高二學生，未來值得依循同樣的設計原則，設計高一、高二及高三數學其他單元數學創造力活動，並以實驗研究驗證成效。

4.本研究未來可考慮以三至四位學生為一組的合作學習方式執行，或者是教師將所有學生作品放於網路上，以供所有學生可觀摩他人之作品後做第二次的修改或者可供下一次作業的改進方式。以回饋學習的方式來學習，在數學創造思考的訓練上應該會有較多的成效。

5. 本研究所設計的評量項目中，若能將評量項目每一項評分設定一些細部標準，則在做評量時評量者之間將會有較佳的評分者一致性。

6. 研究者認為此研究在教學上推行的困難之處，研究者歸納了下列幾點：

a.在做評量時，高中教師必須要有足夠的時間。由於兩位研究者在做評量時，在評量到數學運算及推論分析時，對學生所提的方法及驗證過程都必須花一週的時間時間思考其對錯的問題。因此考慮到一般高中教師在校教學的負擔似乎帶給教師一項新挑戰。

b.高中教師必須要有數學創造力的概念來掌握住題目的設計原則及評量原則。對於整個題目設計及在評量上都是相當重要的。

[參考文獻]

張玉成(民 72) 創造性發問技巧之研究。中華民國特殊教育學會主編：瞭解與支持特殊兒童，師大特教中心，56-60 頁。

張玉成(民 72) 教師發問技巧及其對學生創造思考能力影響之研究。台北市，教育部。112 頁。

洪蘭(民 88)譯;Robert J. Sternberg, Todd I. Lubart 不同凡想。台北：遠流。

Amabile, T.M. (1979) *Effects of external evaluation on artistic creativity*. Journal of Personality and Social Psychology, 37,221-233.

Amabile, T.M. (1982). *Children's artistic creativity: Detrimental effects of competition in a field setting*.

Personality and Social Psychology Bulletin 8: 573-578.

Amabile, T.M. (1983). *Creativity in context*. Boulder, Colo. : Westview Press.

Amabile, T.M. (1983). *The social psychology of creativity*. New York: Springer-Verlag.

Andrews,A.G.(1997). *Doing what comes Naturally: talking about Mathematics*. Teaching Children Mathematics ,January, 236-239.

Baron, J.B. (1991). *Performance assessment: Blurring the edges of assessment, curriculum, and instruction*. In G. Kulm & S.M. Malcon (Eds.), Science assessment in the service of reform. Waldorf, MD: American Association for the Advancement of Science.

Hullfish, H.G. & Smith, P.G. (1961). *Reflective thinking : the method of education*. New York : Dodd, Mead and Company.

Nation Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.

Pintrich, P. R., & DeGroot, E. V. (1990). Motivational and self-regulated learning components of classroom academic performance.

Journal of Educational Psychology, 82, 33-40.

Rose, L.H., & Lin, H.T. (1985). *A meta-analysis of long-term creativity training programs*. Journal of Creative Behavior, 18, 11-22.

Smith, L.H. (1994). *A Comparison of preservice elementary school teachers' accuracy in using analytic and holistic methods to score pupil responses to open-ended mathematics tasks*. Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy in the College of Education University of South Carolina, 8-9.

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (1991, Apr.). *Creating creative minds*. Phi Delta Kappan, 608-614.

Stenmark, J.K. (Ed.) (1991). *Mathematics assessment: Myths, models, good questions, and practical suggestions*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Suydam, M.N. (1984) : "Research Report:*Problem Solving*." Arithmetic teacher 31. (May 1984),P36. Reston, Virginia : NCTM.

附件

附件一：高中數學創造力評分表

請評量者針對學生作業中所展現的數學創造力評分。答案沒有對錯之分，請你依實際狀況回答，資料是為提供研究所需。請利用 1-5 數字刻度答題。若你認為某題目敘述與學生的狀況完全相符，請圈選 5；若題目敘述與學生的狀況完全不符，則圈選 1；若敘述與學生的狀況部分相符，請圈選適當數字。謝謝！

國立交通大學應數所研究生 徐俊男

姓名：_____ 性別： 男 女 班級：_____ 學號：_____

1. 學生能知道何謂乘法原理。
2. 學生能知道何謂排列、何謂組合。
3. 學生能有條理的對問題作分類。
4. 學生能針對問題歸納出一些結論。
5. 學生能將問題再做適度的改變。
6. 學生在做數學習題過程中,能發現自己錯誤的地方並修正它。
7. 學生能以合理的理由來論述所求得結論是正確的。
8. 學生會用心的整理所要交出來的作業。
9. 從作業中顯現出學生喜歡這樣的作業方式。
10. 解題過程中遇到無法再繼續進行下一步時，會再想其他方法。
11. 學生會自己做假設,並求出結果。
12. 學生會設計自己的實驗，並驗證自己的想法。
13. 學生會嘗試從各種角度的想法來嘗試解題。
14. 當所需運算的複雜度很高時，仍然能將問題解出。

附錄一

習題一：渡船三艘，每船最多可載五人，求下列同時安全渡過的方法各多少？(1) 6 人同時渡過時。(2) 7 人同時渡過時。

習題一選取的考量要素：此題目雖然選自課本習題，但研究者發現此題目有足夠的空間可讓學生發揮創造能力的地方。考量要素其整理如下五點：

1. 此題目無法單單以排列或組合的概念直接求解，必須經過分析、配合乘法定理、排列與組合等數學概念。
2. 此題目的解法有多種，非唯一。其解法可從人選船來考量、可從船選人來考量、先將人給分組再討論排列問題、使用土法煉鋼慢慢做或者採用樹狀圖法分析等。
3. 當此題目的人數或船數一經改變，解法過程及需考量因素也有可能跟著改變，學生可發揮創意的空間就很大。
4. 學生對所求答案的證明或解釋過程，如何做有力的說服，相信是學生發揮數學創意的地方所在。
5. 如何將題目給推廣或歸納出好的結論，都是讓學生可自由發揮的地方。

習題二：問題 1：將十件相同物品分給甲、乙、丙三人，其中一人至少得一件，一人至少得二件，另一人至少得三件，求分法有多少？

問題 2 : 於 $(A + B + C + D)^7$ 的展開式中 ,

(1) 共有多少不同類的項 ? (2) 與 $B^3 C^4$ 同型項有多少個 ?

(3) $ABC^2 D^3$ 項的係數是多少 ?

(變化球!) 問題 3 : 請你討論問題 1 與問題 2 之間是否有何關聯? 如果問題 1 做適當改變, 這時關係又會作如何改變? 你還有哪些想法或創見?

選取的考量要素: 習題二選取的考量要素除了相似習題一中的五點之外, 我們並設計了問題(3), 讓學生去思考問題(1)與問題(2)之關連性等, 讓學生真正瞭解到數學並非只是求得問題的答案, 而是思考、創意的發揮。

習題三:

甲、乙兩人在猜拳(剪刀、石頭、布), 共比五場。請問甲連續三場都贏乙的機率為何?

(一) 令 $n(A)$ 表示甲在五場內連續三場都贏乙的可能性之組合數; 令 $n(S)$ 表示甲與乙在五場內猜拳的所有可能性之組合數。則 甲在五場內連續三場都贏乙的 ~~機率~~ $P = n(A)/n(S)$, 請求出 $n(A)$ 、 $n(S)$ 及 P 。

(---新觀念)

(二) 請用其他方法來驗證(一)所求的答案是正確的。(---想的過程較重要若想法不完整, 請有條理的詳述所想的過程, 再述說你知道答案正確之理由---這裡就可能顯示你的創新, 理解, 表達的能力。)

(三) 請運用排列、組合的概念, 再去想想這裡可引發出與機率相關好玩的問題及其可能計算方法(比方, 連續三場都贏, 換成至少三場都贏, 恰有三場都贏 或其他的想法等。注意 好想法常與解的好想法是姊妹。好想法常常很調皮, 需要你的耐心與細心。有多少時間就做多少, 你的創造力是玩出的)

選取的考量要素: 習題三設計時所考量的重點在於鼓勵與啟發在習題一及習題二上的概念可以繼續讓學生在新問題中能夠發揮數學上的創意。