

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

計畫編號：NSC 89-2115-M-009-033

執行期限：89年8月1日至90年7月31日

主持人：翁志文 國立交通大學應用數學系

weng@math.nctu.edu.tw

90年9月28日

一、中文摘要

令 $\Gamma = (X, R)$ 為一直徑至少 3 的距離正則圖，而 \mathbb{M} 是其 Bose-Mesner 代數。固定一基點 $x \in X$ ，而令 \mathbb{T} 是 Γ 對於這基點的 Terwilliger 代數。令 E_i^* ($0 \leq i \leq D$) 為 Γ 相對於 x 的第 i 個配主等冪，及令 V 為 Γ 的標準 \mathbb{T} 模。假設 $v \in E_1^*V$ 為一垂直於端點為 0 的不可化約 \mathbb{T} 模的非 0 向量。令 $(\mathbb{M}; v) = \{P \in \mathbb{M} | Pv \in E_D^*V\}$ 。以下兩敘述等價：

(i) $(\mathbb{M}; v)$ 的維度為 2。

(ii) $\mathbb{M}v$ 是一端點為 1 的不可化約 \mathbb{T} 薄模。

接著，假設上面 (i)-(ii) 成立，且令 α 是 $E_1^*AE_1^*$ 相對於 v 的特徵值。則 $(\mathbb{M}; v)$ 有一基底 $\{J, E\}$ ，其中 E 為一相對於

$$\tilde{\alpha} = \begin{cases} \infty & \alpha = -1, \\ -1 - \frac{b_1}{1+\alpha} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

的擬等冪。

關鍵詞： Terwilliger 代數；配等冪；擬等冪。

Abstract: Let $\Gamma = (X, R)$ denote a distance-regular graph with diameter $D \geq 3$. Let \mathbb{M} denote the Bose-Mesner algebra of Γ . Fix a base vertex $x \in X$, and let \mathbb{T} denote the Terwilliger algebra of Γ with respect to x . Let E_i^* ($0 \leq i \leq D$) denote the i th dual idempotent of Γ with respect to x . Let V denote the stan-

nonzero vector which is orthogonal to the irreducible \mathbb{T} -module of endpoint 0. Let $(\mathbb{M}; v)$ denote the subspace $\{P \in \mathbb{M} | Pv \in E_D^*V\}$ of \mathbb{M} . Then the following (i)-(ii) are equivalent.

(i) $(\mathbb{M}; v)$ has dimension 2.

(ii) $\mathbb{M}v$ is a thin irreducible \mathbb{T} -module of endpoint 1.

Furthermore, suppose (i)-(ii) hold, and let α be the eigenvalue of $E_1^*AE_1^*$ associated with v . Then $(\mathbb{M}; v)$ has a basis $\{J, E\}$, where E is a pseudo idempotent associated with

$$\tilde{\alpha} = \begin{cases} \infty & \alpha = -1, \\ -1 - \frac{b_1}{1+\alpha} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Keywords: Terwilliger algebra; dual idempotent; pseudo idempotent.

二、緣由與目的

報告人於研究文獻 [5] 時了解到許多緊密距離正則圖的性質，特別是這類圖上的 Terwilliger 模的性質。同時我們也發現這類圖中的主等冪對這些 Terwilliger 模的研究，扮演重要角色，也因此這類圖的端點為 1 的 Terwilliger 模可以完成刻劃。由於 Terwilliger 模曾被許多人研究，如 [3], [4], [5], [6], [8], [11]，因此我們決定由此切入，幸運的，我們推廣了 [5] 的結果，對所有距離正則圖裡，終點為 1 的 Terwilliger 模有進一步的了解。

中文摘要的內容是我們主要的發現, 雖然對終點為 1 的 Terwilliger 模, 我們還不是完全了解, 但我們至少知道, 在這方面研究中, 有一類我們將其定義為擬等冪的矩陣扮演非常重要的角色. 而這擬等冪是主等冪很自然的推廣. 我們對於什麼時候擬等冪會成為主等冪, 也有刻劃.

四、計劃成果自評

此計畫的結果將寫成一篇論文, 而新發現的擬等冪乘法結構有繼續研究的價值. 因為主等冪的平方等於自己, 擬等冪可能也有一些好的乘法性質. 另外值得研究, 是否有一類距離正則圖, 他們是緊密距離正則圖的自然推廣, 而其刻劃也能很自然的完成呢?

五、參考文獻

- [1] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I*, Benjamin-Cummings, California, 1984.
- [2] A.E. Brouwer, A. M. Cohen, and A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [3] B. Curtin, Bipartite distance-regular graphs I, *Graphs Combin.*, 15(2):143-158, 1999.
- [4] B. Curtin, Bipartite distance-regular graphs II, *Graphs Combin.*, 15(4):377-391, 1999.
- [5] J. Go, Tight distance-regular graphs and the Terwilliger algebra, preprint
- [6] S. Hobart and T. Ito, The structure of nonthin irreducible \mathbf{T} -modules of endpoint 1: ladder bases and classical parameters, *J. Algebraic Combin.*, 7(1):53-75, 1998.
- [7] P. Terwilliger, A new feasibility condition for distance-regular graphs, *Discrete Math.*, 61:311-315, 1986.
- [8] P. Terwilliger, The subconstituent algebra of an association scheme I, *Journal of Algebraic Combinatorics*, 1(4):363-388, 1992.
- [9] P. Terwilliger, The subconstituent algebra of an association scheme II, *Journal of Algebraic Combinatorics*, 2(1):73-103, 1993.
- [10] P. Terwilliger, The subconstituent algebra of an association scheme III, *Journal of Algebraic Combinatorics*, 2(2):177-210, 1993.
- [11] P. Terwilliger, The subconstituent algebra of a distance-regular graph; thin modules with endpoint one, preprint