

汽機葉片之非線性振動週期研究
An Investigation on the Period of the Nonlinear
Vibration of Turbine Blade
完成報告

計畫編號：88-TPC-E-009-002

執行時間：1998 年 08 月 01 日至 1999 年 07 月 31 日

計畫主持人：蕭國模

共同主持人：

行政院國家科學委員會

88 年度電力科技產業學術合作研究計畫

汽機葉片之非線性振動週期研究

An Investigation on the Period of the Nonlinear
Vibration of Turbine Blade

中華民國 88 年 7 月

中文摘要

關鍵詞：梁，幾何非線性、振動

本文以數值積分法求梁結構受週期載荷的非線性穩態解，本文中探討不同載荷形式、週期、大小，阻尼大小及初始條件對穩態解的影響。

為了瞭解穩態解中的頻率組合，本文利用 FFT 把時間域的穩態解轉到頻率域觀察。為瞭解在不同時刻時振形的變化，本文亦用 FFT 分析空間的振形。

本文採用 Newmark 直接積分法及牛頓迭代法解非線性動態平衡方程式。

Abstract

Keywords : beam, geometrical nonlinearity, vibration

The steady periodic forced response for large amplitude of planar beam structures is investigated using direct integration method. The effect of the loading type, period, and amplitude, initial condition, and damping ratio on the steady state response are studied.

In order to understand the frequency components of the steady state response, the fast Fourier transform (FFT) is employed to calculate the frequency spectrums of the steady response. In order to understand the vibration shape of the steady state response, the frequency spectrums of the vibration profiles in the spatial domain at different time will be calculated using FFT as well.

An incremental method based on the Newmark direct integration method and the Newton-Raphson is employed here for the solution of nonlinear dynamic equilibrium equations.

目 錄

中文摘要.....	I
Abstract.....	II
目錄.....	III
圖表目錄.....	V
第一章 緒論.....	1
第二章 有限元素分析.....	3
2.1 導論.....	3
2.2 基本假設.....	3
2.3 座標系統.....	4
2.4 梁元素之變形描述.....	4
2.4.1 梁之形心軸的位移與旋轉.....	4
2.4.2 梁元素之位移與應變.....	5
2.5 節點參數與節點力.....	7
2.6 元素節點內力之推導.....	7
2.7 元素矩陣.....	12
2.8 系統運動方程式與收斂準則.....	13
2.9 元素節點變形角之決定.....	14

2.10 穩態解的論述.....	15
第三章 數值方法與程序.....	17
3.1 數值方法.....	17
3.2 數值程序.....	18
第四章 數值例題與結果.....	20
第五章 結論與展望.....	22
誌謝.....	23
參考文獻.....	24
附表.....	26
附圖.....	27

圖表目錄

表一	不同阻尼係數到達穩態解析所需的週期數 ($P_1 = P_0 \sin \omega t, P_2 = 0$)	26
圖一	座標系統	27
圖二	(a)節點力、節點位移 (b)梁元素上p點及Q點之位置	28
圖三	固端梁之幾何性質、材料性質與受力圖	29
圖四	V_A 在不同頻率的穩態解 ($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}, P_1 = 80 \sin \omega t \text{ lb}, P_2 = 0$)	30
圖五	U_A 在不同頻率的穩態解 ($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}, P_1 = 80 \sin \omega t \text{ lb}, P_2 = 0$)	31
圖六	不同外力大小、頻率改變時 V_A 及 U_A 的振幅變化 ($\mu = 500 \text{ sec}^{-1}, P_1 = P_0 \sin \omega t \text{ lb}, P_2 = 0, \omega_0 = 220.8\pi \text{ rad/sec}$)	32
圖七	不同外力大小、頻率改變時 V_A 及 U_A 的振幅變化 ($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}, P_1 = P_0 \sin \omega t \text{ lb}, P_2 = 0, \omega_0 = 220.8\pi \text{ rad/sec}$)	33
圖八	不同外力大小、頻率改變時 V_A 及 U_A 的振幅變化 ($\mu = 50 \text{ sec}^{-1}, P_1 = P_0 \sin \omega t \text{ lb}, P_2 = 0, \omega_0 = 220.8\pi \text{ rad/sec}$)	34
圖九	V_A 與 $\dot{V}_A$ 的穩態解及其 FFT ($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}, P_0 = 200 \text{ lb}, P_2 = 0, \omega = 80\pi \text{ rad/sec}$)	35
圖十	U_A 與 $\dot{U}_A$ 的穩態解及其 FFT ($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}, P_0 = 200 \text{ lb}, P_2 = 0, \omega = 80\pi \text{ rad/sec}$)	36
圖十一	側向位移及速度在不同時刻的振形及其 FFT ($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}, P_0 = 200 \text{ lb}, P_2 = 0, \omega = 80\pi \text{ rad/sec}$)	37
圖十二	軸向位移及速度在不同時刻的振形及其 FFT ($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}, P_0 = 200 \text{ lb}, P_2 = 0, \omega = 80\pi \text{ rad/sec}$)	38

圖十三 左固定端點反作用力的穩態解及其 FFT	
($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_0 = 200 \text{ lb}$, $P_2 = 0$, $\omega = 80\pi \text{ rad/sec}$)	39
圖十四 左固定端點反作用彎矩的穩態解及其 FFT	
($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_0 = 200 \text{ lb}$, $P_2 = 0$, $\omega = 80\pi \text{ rad/sec}$)	40
圖十五 不同初始狀態 V_A 的穩態解	
($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_0 = 200 \text{ lb}$, $P_2 = 0$, $\omega = 560\pi \text{ rad/sec}$)	41
圖十六 不同初始狀態 U_A 的穩態解	
($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_0 = 200 \text{ lb}$, $P_2 = 0$, $\omega = 560\pi \text{ rad/sec}$)	42
圖十七 V_A 與 $\dot{V}_A$ 的穩態解及其 FFT	
($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_1 = P_2 = P_0 \sin \omega t$, $P_2 = 80 \text{ lb}$, $\omega = 80\pi \text{ rad/sec}$)	43
圖十八 U_A 與 $\dot{U}_A$ 的穩態解及其 FFT	
($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_1 = P_2 = P_0 \sin \omega t$, $P_2 = 80 \text{ lb}$, $\omega = 80\pi \text{ rad/sec}$)	44
圖十九 V_B 與 $\dot{V}_B$ 的穩態解及其 FFT	
($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_1 = P_2 = P_0 \sin \omega t$, $P_2 = 80 \text{ lb}$, $\omega = 80\pi \text{ rad/sec}$)	45
圖二十 U_B 與 $\dot{U}_B$ 的穩態解及其 FFT	
($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_1 = P_2 = P_0 \sin \omega t$, $P_2 = 80 \text{ lb}$, $\omega = 80\pi \text{ rad/sec}$)	46
圖二十一 側向位移及速度在不同時刻的振形及其 FFT	
($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_1 = P_2 = P_0 \sin \omega t$, $P_2 = 80 \text{ lb}$, $\omega = 80\pi \text{ rad/sec}$)	47
圖二十二 軸向位移及速度在不同時刻的振形及其 FFT	
($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_1 = P_2 = P_0 \sin \omega t$, $P_2 = 80 \text{ lb}$, $\omega = 80\pi \text{ rad/sec}$)	48
圖二十三 左固定端點反作用力的穩態解及其 FFT	
($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_1 = P_2 = P_0 \sin \omega t$, $P_2 = 80 \text{ lb}$, $\omega = 80\pi \text{ rad/sec}$)	49
圖二十四 左固定端點反作用彎矩的穩態解及其 FFT	
($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_1 = P_2 = P_0 \sin \omega t$, $P_2 = 80 \text{ lb}$, $\omega = 80\pi \text{ rad/sec}$)	50

第一章 緒論

汽機葉片在運轉時，因長期受到週期載荷的作用，會到達一個週期性的穩態振動。因該穩態振動可以用來估計結構物的疲勞壽命，在結構的分析及設計上是相當重要的，所以本研究擬探討汽機葉片的穩態振動。當振動的振幅不是很小時，其週期是振幅的函數，如想求得正確的週期需採用非線性分析。為了分析上的方便，文獻上通常將葉片視為梁結構。所以本研究擬探討梁結構的非線性穩態分析。

線性振動的穩態解有一定的振形且其頻率和外力的頻率一致。目前的研究已相當完整[1,2]。但非線性振動的穩態解，不一定存在，即使存在亦沒有固定的振態和單一頻率。目前梁的非線性振動的穩態分析已被廣泛的研究[3-16]。因其正確解一般來講無法求得，所以大部分的研究都是在討論其近似解。[16]中將求近似解的方法分為三類。第一類是純解析法(purely analytical techniques)。第二類是純數值方法(purely numerical techniques)。第三類是數值擾動法(numerical-perturbation techniques)。純解析法僅適用於幾何形狀及邊界條件簡單的系統。純數值方法有差分法及有限元素法兩種，一般是在空間域(spatial domain)採用有限元素法而在時間域(time domain)採用差分法。亦有在空間及時間域都採用差分法或都採用有限元素法。這些數值方法在二維或三維的問題都很費計算時間。數值擾動法有兩種方式，一種是假設時間函數的形式再利用 harmonic balance 得到描述空間振形的非線性微分方程組。一種是假設空間振形(例如用線性振動的自然振態)，再利用振態間的正交性得到描述振形運動的藕合二階非線性常微分方程組。若時間函數或振形的形式假設不當或數目取得太少，則擾動法得到的結果將不可靠。

為了得到一些可靠的數值週期穩態解供其他的近似解檢查其精確度，本研究採用有限元素法及直接積分法分析梁的非線性週期振動。

本人曾用共旋轉法及非線性梁理論的一致線性化推導一能考慮所有慣性效應的梁元素[17]。由[17]中的例題可知本人提出的梁元素能分析具大旋轉但小變形的平面梁結構且有很高的精度，所以本研究採用[17]中提出的梁元素。如果非線性週期解存在，則在每一個週期的對應時刻應有相同的位移及速度。所以本研究將以速度及位移訂定週期解的收斂準則。為了達到可靠的結果，本研究採用基於 Newmark 直接積分法及牛頓法之增量迭代法解非線性運動方程式，並一直進行到速度及位移滿足週期解的收斂準則。因從時間域看不出週期解所含的頻率組合，本研究採用 FFT (Fast Fourier Transform) 將得到的穩態解從時間域轉到頻率域觀察。另外本研究將穩態解在不同時刻空間的振形作 FFT，以瞭解在不同的時刻振形的變化情形。為了瞭解初始條件、載荷大小、形式及頻率，還有阻尼係數，對穩態解的影響，本研究中考慮不同的初始條件、載荷大小、形式及頻率，還有阻尼係數。

第二章 有限元素分析

2.1 導論

本章中採用[17]中提出的平面尤拉梁動態分析的一致性共旋轉有限元素推導法。本章中正確地描述了尤拉梁的變形機制，並以d'Alembert原理及虛功原理配合完全非線性梁理論的一致線性化，推導梁元素的節點慣性力及節點變形力。

本章中節點座標、增量位移與增量旋轉、節點速度與加速度、以及系統的運動方程式，都是定義在一組固定的總體座標系統上；而梁元素的應變與元素矩陣，則是在當前元素位置上建立的元素座標上定義。在元素座標上定義的元素矩陣可經由標準的座標轉換，將其轉換至對應於總體座標上，即可組合成系統矩陣。當梁結構被離散成有限元素時，元素的運動主要是剛體運動，如果將剛體運動由總位移中扣除，而且選擇大小適當的元素，則元素運動中的變形部份比元素的尺寸小很多。所以，利用共旋轉推導法推導時，元素的節點慣性力與節點變形力中的節點參數的高次項可以忽略。由於正確地考慮尤拉梁的變形，所以慣性力中會出現速度耦合項。

2.2 基本假設

對非線性梁元素的推導，本文作以下的假設：

- (1) Euler-Bernoulli 假說成立。
- (2) 梁元素之形心軸的單位伸長量 (unit extension) 為一常數。
- (3) 梁元素的變形位移量與旋轉量為小變形。
- (4) 梁元素的應變為小應變。

如果元素的大小選擇適當，則一定可以滿足第三項的基本假設。基於第四項的假設，本文使用工程應變 (engineering strain) 與工程應力作為

梁元素的應變與應力之度量，為了推導方便，本文中工程應變是由與其對應的Green strain求得。

2.3 座標系統

為了描述系統的運動與梁元素的變形，本文定義了兩組座標系統（圖一）：

- (1) 固定總體座標系統， X_1, X_2 。節點座標、增量位移與增量旋轉、速度與加速度、以及系統運動方程式，皆在此座標系統中定義。
- (2) 元素座標系統， x_1, x_2 。此座標系統附屬在每一梁元素上，而且建立在梁元素的當前位置上。元素方程式首先建立在元素座標上，然後經由標準的座標轉換，轉換至對應總體座標系統。

2.4 梁元素之變形描述

本文是在元素座標上，描述梁元素的變形與幾何形狀。本文中以符號 $\{\}$ 代表行矩陣。而梁元素的變形可由形心軸在元素座標上的位移與旋轉求得，所以本文在描述梁元素的變形前先描述其形心軸的位移與旋轉。

2.4.1 梁之形心軸的位移與旋轉

令梁形心軸上的任一點P（圖二）在變形前後的位置向量分別為 $\{x, 0\}$ 與 $\{x_c(s), v(s)\}$ ，其中 s 為節點1至點P間的形心軸在變形後的弧長。 $x_c(s)$ ， $v(s)$ ，與 s 之間的關係可表示為

$$x_c(s) = u_1 + \frac{S}{2} \int_{-1}^{\xi} \cos \theta d\xi \quad (1)$$

$$\cos \theta = \left(1 - v'^2\right)^{1/2} \quad (2)$$

$$v' = \frac{dv(s)}{ds} = \sin \theta \quad (3)$$

$$\xi = -1 + 2s/S \quad (4)$$

其中 u_1 為節點1在 x_1 方向上的位移， θ 為由 x_1 軸與形心軸在P點之切線的夾角（逆時鐘方向為正）， S 為梁元素之形心軸變形後的弧長。由元素座標系統的定義，可得 $u_1 = 0$ ，但其變分 δu_1 與其對時間的微分 $\dot{u}_1$ 並不為零。令 ℓ 表變形後形心軸的弦長，則由（1）式可得

$$S = 2\ell/\beta \quad (5)$$

$$\beta = \int_{-1}^1 \cos \theta d\xi \quad (6)$$

$$\ell = x_c(S) - x_c(0) = L - u_1 + u_2 \quad (7)$$

其中 L 表變形前形心軸的弦長， u_2 為節點2在 x_1 方向的位移。

2.4.2 梁元素之位移與應變

圖二中Q點為梁元素中的任意點，而且P點為Q點在形心軸上的對應點。在元素座標上，Q點在梁元素變形前後的位置向量可分別表示如下

$$\mathbf{r}_0 = \{x, y\} \quad (8)$$

$$\mathbf{r} = \{x_c(s) - y \sin \theta, v(s) + y \cos \theta\} \quad (9)$$

其中 $x_c(s)$ 與 $v(s)$ 分別是P點在 x_1 軸與 x_2 軸上的座標（見2.4.1節）。

Q點的位移向量 $\mathbf{u}$ ，可由位置向量 $\mathbf{r}$ 中扣除 $\mathbf{r}_0$ 而得，亦即

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \quad (10)$$

如將 x 與 y 視為獨立變數，則 Green strain $\varepsilon_{ij}(i = 1, 2; j = 1, 2)$ 可表示如下：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{G}_i^t \mathbf{G}_j - \mathbf{g}_i^t \mathbf{g}_j) \quad (11)$$

$$\mathbf{G}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = (1 + \varepsilon_0)(1 - \kappa y)\{\cos \theta, \sin \theta\}$$

$$\mathbf{G}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \{-\sin \theta, \cos \theta\}$$

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x} = \{1, 0\}$$

$$\mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial y} = \{0, 1\} \quad (12)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\partial s}{\partial x} - 1 \quad (13)$$

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial s} = cv'' \quad (14)$$

$$c = 1/\cos \theta \quad (15)$$

$$v'' = \frac{d^2 v}{ds^2} \quad (16)$$

(14) 式之 κ 為梁元素變形後形心軸的曲率之正確表示式。由基本假設

(2)，可將

(13)式表為

$$\varepsilon_0 = \frac{S}{L} - 1 \quad (17)$$

由於採用 Euler-Bernoulli 假說， ε_{ij} 中僅 ε_{11} 不為0，將(12)式代入(11)式可得

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \left[(1 + \varepsilon_0)^2 (1 - \kappa y)^2 - 1 \right] \quad (18)$$

相對於 ε_{11} 之工程應變可表成

$$\varepsilon = (1 + 2\varepsilon_{11})^{1/2} - 1 = (1 + \varepsilon_0)(1 - \kappa y) - 1 \quad (19)$$

(19) 式中 ε 為尤拉梁的工程應變之正確表示式。

本文中假設梁元素變形後的形心軸，其側向位移 $v(s)$ 為 s 的三次 Hermitian 氏多項式，因此 (9) 式之 $v(s)$ 可表成

$$v(s) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}^t \{v_1, v'_1, v_2, v'_2\} = \mathbf{N}_b^t \mathbf{u}_b \quad (20)$$

其中 v_j 與 v'_j ($j = 1, 2$) 分別是 v 與 v' 在節點 j 之節點值。 N_i ($i = 1-4$) 代表形狀函數 (shape function)，且可表示成

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi), & N_2 &= \frac{S}{8}(1-\xi^2)(1-\xi) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi), & N_4 &= \frac{S}{8}(-1+\xi^2)(1+\xi) \end{aligned} \quad (21)$$

其中 S 是當前元素形心軸的弧長， ξ 是 (4) 式定義的無因次變數。

2.5 節點參數與節點力

如圖三所示，本文採用的梁元素，每個節點有三個自由度。在元素節點 j ($j = 1, 2$)上，對應於總體座標系統的節點參數分別是在 X_1 軸與 X_2 軸方向的增量平移 ΔU_j 與 ΔV_j ，以及逆時鐘方向之增量旋轉 $\Delta \theta_j$ ($j = 1, 2$)。在元素節點 j ($j = 1, 2$)上對應於元素座標系統的節點參數分別是在 x_1 軸與 x_2 軸方向的平移 u_j 與 v_j ($j = 1, 2$)，以及逆時鐘方向之旋轉 θ_j ($j = 1, 2$)。對應於節點參數的節點力，為傳統的力與力矩（圖三）。

2.6 元素節點內力之推導

本文利用 d'Alembert 原理與虛功原理求對應於元素節點參數的元素節點內力。由虛功原理可得

$$\delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{f}_a + \delta \mathbf{u}_b^{0t} \mathbf{f}_b = \int_V (\delta \varepsilon^t \sigma + \rho \delta \mathbf{u}^t \ddot{\mathbf{u}}) dV \quad (22)$$

$$\delta \mathbf{u}_a = \{\delta u_1, \delta u_2\} \quad (23)$$

$$\delta \mathbf{u}_b^0 = \{\delta v_1, \delta \theta_1, \delta v_2, \delta \theta_2\} \quad (24)$$

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{f}_a^d + \mathbf{f}_a^i = \{f_{11}, f_{12}\} \quad (25)$$

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{f}_b^d + \mathbf{f}_b^i = \{f_{21}, m_1, f_{22}, m_2\} \quad (26)$$

其中 $\mathbf{f}_j^d$ 與 $\mathbf{f}_j^i$ ($j = a, b$)分別是節點變形力向量與節點慣性力向量。 $\delta \varepsilon$ 為(19)式之 ε 的變分， $\sigma = E\varepsilon$ 代表正應力，而 E 為楊氏係數。 ρ 為密度， $\delta \mathbf{u}$ 是(10)式位移向量 $\mathbf{u}$ 的變分，而且 $\ddot{\mathbf{u}} = d^2 \mathbf{u} / dt^2$ 。本文中以符號 $(\cdot)$ 代表對時間 t 微分， V 是變形前梁元素的體積。

$\mathbf{f}_a$ 與 $\mathbf{f}_b$ 可由 $\delta \varepsilon, \varepsilon, \delta \mathbf{u}$ 與 $\ddot{\mathbf{u}}$ 之正確表示式代入(22)式中求得正確的表示式。如果元素取得足夠小，則元素的節點參數可以遠小於1，因此， $\mathbf{f}_j^d$ ($j = a, b$)只保留到節點參數的一次項， $\mathbf{f}_j^i$ ($j = a, b$)只保留到節點參數的零次項；為

了要包括軸向力的效應，所以 f_b^d 保留了一項節點參數的二次項。當節點參數遠小於1時，慣性力中，速度與變形參數及加速度與變形參數的耦合項應可忽略，所以慣性力中僅保留節點參數的零次項。在推導節點內力 f_a 與 f_b 時，使用了以下之近似式： $1+\varepsilon_0 \approx 1$ ， $v' \approx \theta$ ，與 $\cos\theta \approx 1$ 。為了避免推導 f_a 與 f_b 時，產生不適當之忽略，故上述之近似式必需在 $\delta\varepsilon$ ， ε ， δu 與 $\ddot{u}$ 之正確表示式中使用。

由 (2) – (7) 式與 (14) – (17) 式，可得 (19) 式 ε 的變分

$$\delta\varepsilon = (1 - \kappa y)\delta\varepsilon_0 - (1 + \varepsilon_0)y\delta\kappa \quad (27)$$

$$\delta\kappa = c\delta v'' + c^3 v' v'' \delta v' \quad (28)$$

$$\delta\varepsilon_0 = \frac{\delta S}{L} = \frac{2\delta\ell}{\beta L} - \frac{2\ell\delta\beta}{\beta^2 L} \quad (29)$$

$$\delta\ell = \{-1, 1\}^t \{\delta u_1, \delta u_2\} = \mathbf{G}_a^t \delta \mathbf{u}_a \quad (30)$$

$$\delta\beta = -\int_{-1}^1 cv' \delta v' d\xi \quad (31)$$

其中 $\delta v'$ 與 $\delta v''$ 分別為對應於節點參數的微分 v' 與 v'' 的變分。由於 v' 與 v'' 的形狀函數是當前形心軸弧長 S 的函數，所以需考慮形狀函數的變分，並表示如下

$$\delta v' = (\delta \mathbf{N}_b'^t) \mathbf{u}_b + \mathbf{N}_b'^t \delta \mathbf{u}_b = -\frac{\delta\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0} \mathbf{N}_c^t \mathbf{u}_b + \mathbf{N}_b'^t \delta \mathbf{u}_b \quad (32)$$

$$\delta v'' = (\delta \mathbf{N}_b''^t) \mathbf{u}_b + \mathbf{N}_b''^t \delta \mathbf{u}_b = -\frac{\delta\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0} \mathbf{N}_d^t \mathbf{u}_b + \mathbf{N}_b''^t \delta \mathbf{u}_b \quad (33)$$

$$\delta \mathbf{u}_b = \{\delta v_1, \cos\theta_1 \delta\theta_1, \delta v_2, \cos\theta_2 \delta\theta_2\} \quad (34)$$

$$\mathbf{N}_c = \{N_1', 0, N_3', 0\} \quad (35)$$

$$\mathbf{N}_d = \{2N_1'', N_2'', 2N_3'', N_4''\} \quad (36)$$

由元素座標系統之定義可知， v_1 與 v_2 為零。因此，(32) 式中 $N_c^t u_b = 0$ ，而
且 (33) 式中 $N_d^t u_b = v''$ 。

將 (20)，(21)，與 (28) — (31) 式代入 (27) 式中，則 $\delta\epsilon$ 可表
成

$$\begin{aligned} \delta\epsilon = & \frac{2}{\beta L} G_a^t \delta u_a + \frac{1+\epsilon_0}{\beta} \int_{-1}^1 cv' N_b'^t d\xi \delta u_b \\ & - (1+\epsilon_0) y (c N_b'' + c^3 v' v'' N_b')^t \delta u_b \end{aligned} \quad (37)$$

將上式作 $1+\epsilon_0 \approx 1$ ， $v' \approx \theta$ ，與 $\cos\theta \approx 1$ 的近似式，保留所有節點參數的零次項
與一項節點參數的一次項，可得 $\delta\epsilon$ 如下

$$\delta\epsilon = \frac{1}{L} G_a^t \delta u_a + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v' N_b'^t d\xi \delta u_b - y N_b''^t \delta u_b \quad (38)$$

由 (1) — (9)，(20)，與 (21) 式可得 (10) 式 u 的變分 δu

$$\delta u = \left\{ \delta u_1 + \frac{\delta S}{2} \int_{-1}^{\xi} \cos\theta d\xi - \frac{S}{2} \int_{-1}^{\xi} cv' \delta v' d\xi - y \delta v', \delta v - ycv' \delta v' \right\} \quad (39)$$

$$\delta v = (\delta N_b^t) u_b + N_b^t \delta u_b = \frac{\delta\epsilon_0}{1+\epsilon_0} N_e^t u_b + N_b^t \delta u_b \quad (40)$$

$$N_e = \{0, N_2, 0, N_4\} \quad (41)$$

將 (39) 式作 $v' \approx \theta$ 與 $\cos\theta \approx 1$ 之近似式，並保留所有節點參數的零次項，則
 δu 表示如下

$$\delta \mathbf{u} = \left\{ \mathbf{N}_a^t \delta \mathbf{u}_a - y \mathbf{N}_b'^t \delta \mathbf{u}_b^0, \mathbf{N}_b^t \delta \mathbf{u}_b^0 \right\} \quad (42)$$

$$\mathbf{N}_a = \left\{ \frac{1-\xi}{2}, \frac{1+\xi}{2} \right\} \quad (43)$$

由 (1) - (10), (20) 與 (21) 式可得 $\ddot{\mathbf{u}}$, 使用 $1+\varepsilon_0 \approx 1$, $v' \approx \theta$, 與 $\cos\theta \approx 1$ 之近似式, 並保留所有節點參數的零次項, 則 $\ddot{\mathbf{u}}$ 可以表示為

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}} &= \{ \ddot{a}_x, \ddot{a}_y \} \\ &= \left\{ \mathbf{N}_a^t \ddot{\mathbf{u}}_a + \frac{L(1+\xi)}{4} \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_b'^t \dot{\mathbf{u}}_b)^2 d\xi - \frac{L}{2} \int_{-1}^{\xi} (\mathbf{N}_b'^t \dot{\mathbf{u}}_b)^2 d\xi - y \mathbf{N}_b'^t \ddot{\mathbf{u}}_b \right. \\ &\quad \left. + \frac{2y}{L} \mathbf{N}_c^t \dot{\mathbf{u}}_b \mathbf{G}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a, \mathbf{N}_b^t \ddot{\mathbf{u}}_b - y (\mathbf{N}_b'^t \dot{\mathbf{u}}_b)^2 + \frac{2}{L} \mathbf{G}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a \mathbf{N}_c^t \dot{\mathbf{u}}_b \right\} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_a = \{ \dot{u}_1, \dot{u}_2 \}, \quad \ddot{\mathbf{u}}_a = \{ \ddot{u}_1, \ddot{u}_2 \} \quad (45)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_b = \{ \dot{v}_1, \dot{\theta}_1, \dot{v}_2, \dot{\theta}_2 \}, \quad \ddot{\mathbf{u}}_b = \{ \ddot{v}_1, \ddot{\theta}_1, \ddot{v}_2, \ddot{\theta}_2 \} \quad (46)$$

(45) 與 (46) 式的 $\dot{\mathbf{u}}_i$ 與 $\ddot{\mathbf{u}}_i$ ($i = a, b$) 是對應元素座標的元素絕對速度與加速度, 他們可經由對應總體座標的系統運動方程式中, 粹取出對應的總體速度與加速度, 再利用座標轉換程序求得。

將 (19), (38), (42), 與 (44) 式代入 (22) 式, 利用 $1+\varepsilon_0 \approx 1$, $v' \approx \theta$, 與 $\cos\theta \approx 1$ 之近似式並忽略節點參數的高次項, 由 (22) 式的等號兩邊的 $\delta \mathbf{u}_a$ 與 $\delta \mathbf{u}_b^0$ 之係數對等的關係, 可求得對應的節點內力向量為

$$\mathbf{f}_a^d = A E \varepsilon_0 \mathbf{G}_a \quad (47)$$

$$\mathbf{f}_b^d = \frac{A E \varepsilon_0 L}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{N}_b' \mathbf{N}_b'^t d\xi \mathbf{u}_b + \frac{E I L}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_b''^t d\xi \mathbf{u}_b \quad (48)$$

$$\begin{aligned} f_a^i = & \frac{\rho AL}{2} \int_{-1}^1 N_a N_a^t d\xi \ddot{u}_a \\ & + \frac{\rho AL}{2} \int_{-1}^1 N_a \left[\frac{L(1+\xi)}{4} \int_{-1}^1 (N_b'^t \dot{u}_b)^2 d\xi - \frac{L}{2} \int_{-1}^{\xi} (N_b'^t \dot{u}_b)^2 d\xi \right] d\xi \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} f_b^i = & \frac{\rho AL}{2} \int_{-1}^1 N_b N_b^t d\xi \ddot{u}_b + \frac{\rho IL}{2} \int_{-1}^1 N_b' N_b'^t d\xi \ddot{u}_b \\ & + \rho A G_a^t \dot{u}_a \int_{-1}^1 N_b N_b^t d\xi \dot{u}_b - \rho I G_a^t \dot{u}_a \int_{-1}^1 N_b' N_b'^t d\xi \dot{u}_b \end{aligned} \quad (50)$$

其中A是斷面積， $I = \int_A y^2 dA$ 。(49)與(50)式中畫底線之項即為速度耦合項。

2.7 元素矩陣

元素剛度矩陣與元素質量矩陣可由(47)－(50)式之元素節點內力向量對節點參數與節點參數之時間微分的微分求得，但本文中元素矩陣僅用來求平衡迭代時的位移增量及修正量，故使用近似式即可。為了方便起見，本文採用尤拉梁的元素矩陣，亦即對應 u_a 之軸向剛度矩陣 k_a 、對應 u_b^0 之撓曲剛度矩陣 k_b 與幾何剛度矩陣 k_g 、對應 $\ddot{u}_a$ 之線性桿元素之一致質量矩陣 m_a 、以及對應 $\ddot{u}_b$ 之平移一致質量矩陣 m_t 與旋轉一致質量矩陣 m_r ：

$$k_a = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$k_b = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$k_g = \frac{f_{12}}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\mathbf{m}_a = \frac{\rho_A L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\mathbf{m}_t = \frac{\rho_A L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$\mathbf{m}_r = \frac{\rho_I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\rho_A = \int_A \rho dA, \quad \rho_I = \int_A \rho y^2 dA \quad (57)$$

2.8 系統運動方程式與收斂準則

系統的非線性運動方程式可表為

$$\Psi = \mathbf{F}^I + \mathbf{F}^C + \mathbf{F}^D - \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (58)$$

其中 Ψ 為系統慣性力 $\mathbf{F}^I$ 、阻尼力 $\mathbf{F}^C$ 、變形力 $\mathbf{F}^D$ 、以及系統外力 $\mathbf{P}$ 間的不平衡力。 $\mathbf{F}^I$ 與 $\mathbf{F}^D$ 可由(47)－(50)式的元素節點力，用標準的座標轉換，轉換到對應總體座標後再組合而成。本文中假設阻尼力是由viscous damping造成的，並可以表示成 $\mathbf{F}^C = \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}$ ，其中 $\mathbf{C}$ 是阻尼矩陣， $\dot{\mathbf{U}}$ 是節點速度向量。本文中僅考慮與質量矩陣成比例的阻尼矩陣。

本文以不平衡力 Ψ 的 weighted Euclidean norm 作為迭代時的誤差度量，而且收斂準則表示為

$$e = \frac{\|\Psi\|}{N\|\Psi_r\|} \leq e_{tol} \quad (59)$$

其中 Ψ_r 代表第 r 次迭代時的不平衡力，本文以第一次（即 $r=1$ ）迭代時的不平衡作為參考之不平衡力。 e_{tol} 為一給定之容許誤差值。

2.9 元素節點變形角之決定

梁元素的變形由總變形角 θ_i ($i=1, 2$) 來決定，說明如下。如圖一所示，令 θ_i^I ($i=1, 2$)， X_{ij}^I ($i=1, 2; j=1, 2$)，與 x_i^I ($i=1, 2$) 分別表示元素在第 I 次增量平衡位置的節點變形角、節點座標、與元素座標軸。令 Δq 表示由系統的增量位移粹取出的元素增量位移，若 Δq 表成下式

$$\Delta q = \{\Delta U_1, \Delta V_1, \Delta \theta_1, \Delta U_2, \Delta V_2, \Delta \theta_2\} \quad (60)$$

其中 ΔU_i ， ΔV_i ， $\Delta \theta_i$ ($i=1, 2$) 分別是相對於總體座標的增量平移與增量旋轉，則對應於 Δq 的節點座標可表為

$$\begin{aligned} X_{1j} &= X_{1j}^I + \Delta U_j \\ X_{2j} &= X_{2j}^I + \Delta V_j \end{aligned} \quad (61)$$

利用 (61) 式可求得當前元素座標軸 x_i ($i=1, 2$)。

如圖一所示，令 α 為 x_1^I 軸轉到 x_1 軸之逆時鐘剛體轉角，則當前元素位置的節點變形角 θ_i ($i=1, 2$) 為

$$\theta_i = \theta_i^I + \Delta \theta_i + \alpha \quad (62)$$

2.10 穩態解的論述

當一含阻尼的線性系統受週期載重作用時，因阻尼的作用，其暫態響應會逐漸消散，最後會達到一個週期穩態解其振態不隨時間變化且其頻率與外力頻率相同。但含阻尼的非線性系統受週期載重作用時，不一定會有穩態解存在，如有穩態解存在時，其週期有可能是外力週期的整數倍，且其振態亦可能隨時間改變。為了得到可靠的結果，本文採用直接積分的方法來求非線性系統的穩態解。本文中僅考慮穩態解的週期是外力週期的整數倍。所以(58)式的穩態解有下列性質：

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(t) &= \mathbf{U}(t) - \mathbf{U}(t - mT) = 0 \\ \mathbf{E}(t) &= \ddot{\mathbf{U}}(t) - \ddot{\mathbf{U}}(t - mT) = 0 \end{aligned} \quad (63)$$

上式中 $\mathbf{U}$, $\ddot{\mathbf{U}}$ 為系統的節點位移及節點加速度， t 為時間， T 表外力的週期， m 為一整數，本文中僅取 $m=1$ 或 2 或 3 。

本文中以 $\mathbf{D}(t)$ 和 $\mathbf{E}(t)$ 的 Euclidean norm 來計量穩態解的誤差，並採用以下的收斂準則：

$$e_d = \frac{\|\mathbf{D}(t)\|}{\|\mathbf{U}\|_{\max}} \leq E_d \quad (64)$$

$$e_v = \frac{\|\mathbf{E}(t)\|}{\|\ddot{\mathbf{U}}\|_{\max}} \leq E_v \quad (65)$$

其中 $\|\mathbf{U}\|_{\max}$ 和 $\|\ddot{\mathbf{U}}\|_{\max}$ 分別表示在 $(n-1)T \leq t \leq nT$ (n 為正整數時)的時段內，位移和加速度之 Euclidean norm 的最大值。 E_d 和 E_v 為給定的容許誤差。本文中 E_d 和 E_v 皆取為 10^{-3} 。為了方便，本文僅檢查 $t = nT$ 時的誤差。

本文中的數值積分一直執行到(64)和(65)式滿足二次才停止，並以最後 mT 時段內的數值解作為穩態解。

因為在時間域內無法得知穩態解的頻率組合，所以本文利用 FFT(Fast Fourier Transform)將穩態解從時間域轉到頻率域。另外為了瞭解在不同時刻中穩態解振態的變化，本文也利用 FFT 分析不同時刻空間振行中正餘弦函數的組合變化。本文分析了位移和速度的 Euclidean norm 有最大值及最小值時四個時刻的振形。

為了增加 FFT 的準確性，本文以複製的方式在時間域共取了 10 個外力週期的穩態解，在空間域則取 59 個的振形作 FFT 分析。

第三章 數值方法與程序

3.1 數值方法

本文所採用的數值方法為直接積分法與牛頓法的增量迭代法[17]，並簡略的介紹與說明如下：

假設在時間 t_n 時，滿足運動方程式的位移、速度、與加速度 $U_n, \dot{U}_n, \ddot{U}_n$ 為已知，則在 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ 時刻的位移、速度、與加速度 $U_{n+1}, \dot{U}_{n+1}, \ddot{U}_{n+1}$ 可由下面的迭代過程得到：以 $U_{n+1} = U_n$ 當作時間 t_{n+1} 時的初始猜測值，然後依Newmark 直接積分法，在時間 t 時的速度及加速度的式子

$$\ddot{U}_{n+1} = \frac{(U_{n+1} - U_n)}{\alpha \Delta t^2} - \frac{\dot{U}}{\alpha \Delta t} - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \ddot{U}_n \quad (66)$$

$$\dot{U}_{n+1} = \dot{U}_n + \Delta t[(1 - \beta) \ddot{U}_n + \beta \ddot{U}_{n+1}] \quad (67)$$

其中 Δt 為時間間隔， α, β 為積分常數。本文所採用的是平均加速度法，即 $\alpha = 1/4, \beta = 1/2$ ，利用 $U_{n+1}, \dot{U}_{n+1}, \ddot{U}_{n+1}$ 即第二章求節點內力的公式，所得之值代入(58)

式，即可得一不平衡力 Ψ ，在以下式求得位移修正量 ΔR 。

$$\Delta R = -\hat{K}^{-1} \Psi \quad (68)$$

$$\hat{K} = 1/\alpha \Delta t^2 M + \beta/\alpha \Delta t C + K \quad (69)$$

其中 $\hat{K}$ 為有效剛度矩陣(Effective Stiffness Matrix)。M、C、K分別為系統之總質量、阻尼、剛度矩陣。將 Ψ 及 ΔR 代入(59)式的收斂準則中，若不滿足，在將(68)式得到之 ΔR 加到上一次的位移預測值中，可得一新的預測值。重複上述的步驟，直到不平衡力及其位移修正量滿足收斂準則為止。此時的

位移、速度與加速度解，即為系統在時間 t_{n+1} 時的位移、速度及加速度。

若時間達到外力週期的整數倍時，將此一週期時段的系統代入(64)，(65)二式中，若滿足收斂準則，則此一時段的系統解即是(58)式的穩態解。

在迭代的過程中，需要用軸向變形力來計算元素的幾何剛度矩陣及撓曲節點力，為使平衡迭代較容易收斂，因此，本文中使用 two cycle method [17]，即在第一次循環迭代過程中，是以前一次收斂時的軸向變形力，來求得幾何剛度矩陣及撓曲內力，待滿足(59)式的收斂準則後，則進入第二次的循環迭代，此時是以第一次循環迭代收斂時的軸向變形力來求得元素幾何剛度及撓曲節點力，待收斂後，以第二次循環迭代的收斂解當成本次增量的收斂解。

本文中是取 $t=0$ 時的靜態平衡解獲取位移、速度為零當初使條件。

3.2 數值程序

本文使用的數值程序可分為五個部份：

(一) 輸入資料

- (a) 輸入梁結構的幾何性質，材料性質，阻尼係數，外加負荷大小（振幅，角速度），種類，與作用所在的位置。
- (b) 增量迭帶姐的容許誤差，穩態解的容許誤差，時間增量，每個時刻最大迭代的次數，增量次數，與更新有效剛度矩陣的次數。
- (c) 初始條件的給與計算。

(二) 利用迭代法求增量的收斂解

- (a) 由 3-1 得速度、加速度預測解。
- (b) 計算元素的節點力，代入(58) 式可得不平衡力。
- (c) 若迭代次數仍小於更新有效剛度矩陣的最大值，著組合有效剛度矩陣；否則進入步驟 (d)。
- (d) 利用(68)，(69)二式求得位移修正量 ΔR 。

(e) 檢查(59)式的收斂準則，若滿足，則檢測時間是否已達外加負荷週期的整數倍，若是則進入第（四）部份；若否則進入第（三）部份。若不滿足收斂準則，著進入步驟(f)。

(f) 將 ΔR 加到上一次的位移預測值中，在回到步驟(a)。

(三) 計算下一次增量迭所需的資料。

(a) 令 $U_{n+1} = U_n$ 。

(b) 將時間加上時間增量 Δt 。

(c) 算出此時外力的大小。

(d) 若增量次數以達給定值，則停止求穩態解的分析工作；若否則回到第（二）部份。

(四) 穩態解的檢測

將此時段內的解代入(64), (65)二式的收斂準則中，若不滿足或第一次滿足，在回到第（二）部份，若為第二次滿足，則進入第（五）部份。

(五) 穩態解的 FFT(Fast Fourier Transform)分析

(a) 將時間域的穩態解取 200 個樣本點來複製，共取了 10 個週期的穩態解，以 2048 點做 FFT。

(b) 位移和速度的 Euclidean norm 有最大值及最小值時的四個時刻將空間域(space domain)的振形取 17 個樣本點來複製，共取了 59 個週期的振形，以 1024 點作 FFT。

第四章 數值例題與結果

本文中分析的例題是如圖三所示的固定端梁，該梁線性振動的第一個自然頻率 $\omega_0 = 220.8 \text{ rad/sec}$ ，其所受的載重可分為兩種型式：
(1) $P_1 = P_0 \sin \omega t, P_2 = 0$ ，(2) $P_1 = P_2 = P_0 \sin \omega t$ 其中 P_0 是載重大小， ω 是角速度。在分析時將梁分為16個元素，直接積分的增量取 $T/400$ ， T 為外力週期，平衡迭代的容許誤差取 10^{-4} ，穩態解容許誤差定為 10^{-3} 。
如果在150個外力週期內得不到穩態解則認為沒有穩態解。

在第一種載重荷，本文考慮了 $P_0 = 80, 200, 320 \text{ lb}$ ， $\omega = 80k\pi \text{ rad/sec}$ ， $k=0, 1, 2, \dots, 11$ ，阻尼係數 $\mu = 50, 100, 500 \text{ sec}^{-1}$ ，在不同的 μ ，到達穩態解所需的週期數目列於表一，從表一可以看出 μ 越小， ω 越大越不容易達到穩態解。

圖四、五是 $\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$ ， $P_0 = 80 \text{ lb}$ ，和在不同頻率 $\omega = 80, 240, 400, 560, 720, 880 \pi \text{ rad/sec}$ 的穩態解， V_A 及 U_A 分別為點A在X、Y 方向的位移大小，從圖四可以看出在低頻時，其穩態解較複雜，在 $\omega = 560 \pi \text{ rad/sec}$ 時 V_A 的穩態解並不對稱其平均值不為0，從圖五可以看出 U_A 在高低頻的穩態解分別位於零線的上下方。

圖六-八為在不同外力大小及頻率更換時 V_A 及 U_A 的振幅變化，從圖六可以明顯的發現曲線有跳躍的現象(jump phenomenon)。

為了要了解穩態解的頻率組合，本文中 $\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$ ， $P_1 = P_0 \sin \omega t$ ， $P_2 = 0$ ， $P_0 = 200 \text{ lb}$ ， $\omega = 80 \pi \text{ rad/sec}$ 時的穩態解作分析。圖九、十分別為 V_A ， $\dot{V}_A$ 及 U_A ， $\dot{U}_A$ 的穩態解及其FFT，(a), (b) 部份為位移的穩態解及其FFT，(c), (d) 部份為速度的穩態解及其FFT。圖十一、十二為在四個不同時刻位移和速度在空間域的振形及其FFT。位移的Euclidean norm 有最大值和最小值的振形分別為曲線1和2，速度的Euclidean norm 有最大值和最小值的振型分別為曲線3和4，() 內為其發生的時刻，其圖形的配置如圖九。圖十三、十四為左邊固定端

點反作用力及其反作用彎矩的穩態解及其FFT。

從圖九、十可以看出側方向位移 V_A 的主要頻率是外力的頻率，其次要頻率是外力的奇數倍。但軸方向位移 U_A 的主要頻率為零，其次要頻率是外力頻率的偶數倍。從圖十一、十二可以看出在不同時刻，振形的頻率組合有相當的變化，所以在非線性分析時假設單一變形可能會造成相當大的誤差。由圖十三、十四可觀得Y方向的反作用力及反作用彎矩的頻率組合與側向位移 V_A 的頻率組合相近，而X方向的反作用力的頻率組合與軸向位移 U_A 的頻率組合相近。

為了解初始狀態對穩態解的影響，本文 $\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$ ， $P_1 = P_0 \sin(\omega t + q\pi)$ ， $q = 1/4, 2/4, \dots, 5/4$ ， $P_0 = 80 \text{ lb}$ ， $P_2 = 0 \text{ lb}$ ， $\omega = 560\pi \text{ rad/sec}$ ：並以 $t=0$ 時的靜態平衡解為初始位移及速度求穩態解。發現 V_A 的穩態解在 $q=1/4, 2/4, 3/4$ 時其穩態解的形狀和 $q=0$ 的穩態解的形狀一樣，但有 $q\pi$ 的相位超前。 $q=1$ 的穩態解是 $q=0$ 的穩態解之鏡射， $q=5/4$ 時其穩態解的形狀和 $q=1$ 的穩態解的形狀一樣，但有 $1/4\pi$ 的相位超前。 U_A 方向的穩態解在不同的 q 時皆相同。圖十四、十五僅畫出 $q=0$ 和 1 時的穩態解。

為了解不同外力形式對穩態解的影響，本文分析了 $P_1 = P_2 = P_0 \sin \omega t$ ， $P_0 = 80 \text{ lb}$ ， $\omega = 80\pi \text{ rad/sec}$ 的穩態解，圖十七、十八、十九、二十分別為 V_A 及 $\dot{V}_A$ ， U_A 及 $\dot{U}_A$ ， V_B 及 $\dot{V}_B$ ， U_B 及 $\dot{U}_B$ 的穩態解及其FFT。圖二十一及二十二分別為在四個不同時刻不同位移和速度的空間域的振形及其FFT。位移的Euclidean norm有最大值和最小值的振形分別為曲線1和2，速度的Euclidean norm有最大值和最小值的振形分別為曲線3和4，()內為其發生的時刻，其圖形的配置如圖九。圖二十三、二十四為左邊固定端點反作用力及反作用彎矩的穩態解及其FFT。

由以上的圖形可以發現外力的形式對 V_A 方向的穩態解影響較小，而 U_A 方向的穩態解受其影響較大。而速度的穩態解的影響又較位移的穩態解明顯，從其FFT圖中可以發現頻率較單一作用力的穩態解頻率複雜。

第五章 結論與展望

非線性振動至今仍沒有固定形式的解法，許多振動性質及其影響因素仍不清楚，只能根據系統的特性採用一些特殊的方法，盡可能地揭示其非線性振動的性質。

本文欲藉由數值的積分方法及 FFT 分析不同載重的條件、初始狀態、阻尼係數等振動參數對非線性梁穩態解的影響。雖能得到可靠的數質解，但其分析時間過長，因而使在分析時振動參數的考量受到限制。

本文在研究過程中，發現初始條件會影響穩態解到達的時間，所以本文曾嘗試以大阻尼系統的穩態解為初始條件來求小阻尼系統的穩態解，但發現沒有改善。本文亦曾嘗試用較大的時間增量的穩態解當初始條件來求較小時間增量的穩態解，發現亦沒有減少到達穩態解的時間。冀望分析所得供他人參考尋得一方法減少到達穩態解的時間，如此將可分析、觀察更多的振動條件下非線性梁的振動，以期能對非線性梁多一份了解。

誌謝

本研究承台灣電力公司補助經費，得以完成，特此誌謝。

參考文獻

- [1] W. Weaver, Jr, *Structrual Dynamics by Finite Elements*, Prentice-Hall, 1987.
- [2] L. Meirovitch, *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff and Noordhoff, Netherlands, 1980.
- [3] K. Parameswaran, T. Y. Varadan, and G. Prathap, 'Nonlinear Vibration of Beams in an Axial Force Field', *J. Acoust. Soc. Am.*, **69** (3), 709-712(1981).
- [4] C. H. Menq and J. H. Griffin, 'A Comparison of Transient and Steady State Finite Element Analyses of the Forced Response of a Frictionally Damped Beam', *ASME, J. Vibr., Acoustics, Stress, Reliability Design*, **107**, 19-25 (1985).
- [5] V. P. Iu, Y. K. Cheung, and S.L. Lau, 'Non-linear Vibration Analysis of Multilayer Beams by Incremental Finite Elements, Part I : Theory and Numerical Formulation', *J. Sound Vibr.*, **100** (3), 359-372 (1985).
- [6] J. Hino, T. Yoshimura, and N. Ananthanarayna, 'Vibration Analysis of Non-Linear Beams Subjected to a Moving Load Using the Finite Element Method', *J.Sound Vibr.*, **100** (4), 477-491 (1985).
- [7] K. Sato, G. Shikanai, and Y. Minamino, 'Non-Linear Vibration of Beams with Attached Spring-Mass System', *JSME*, **29** (253), 2232-2238 (1986).
- [8] A. W. Leissa, 'Closed Form Exact Solutions for the Steady State Vibrations of Continuous System Subjected to Distributed Exciting Forces', *J. Sound Vibr.*, **134** (3), 435-453 (1989).
- [9] W.W. King, G. A. Wempner, and A. K. Flatter, 'Analysis of Beams Vibration by Hu-Washizu Finite Elements', *ASCE, J. Energy Mech.*, **116**, 1864-1868(1990)
- [10] A. Y. T. Leung and T. C. Fung, 'Non-Linear Steady State Vibration and Dynamics Snap Through of Shallow Arch Beams', *Earthquake Energy Str. Dyn*, **19**, 409-430(1990).
- [11] M. Countryman and R. Kannan, 'Non-Linear Damped Vibration of Beams with Peridoc Forcing', *Int. J Non-Linear Mech.*, **27** (1), 75-83 (1992)
- [12] G. R. Bashyam and G. Prathap, 'Galerkin Finite-Element Method for Nonlinear Beam Vibration', *J. Sound Vibr.*, **72**, 191-203(1980)
- [13] B. S. Sarma and T. K. Varadan, 'Ritz Finite Element Approach to Nonlinear Vibrations of Beams', *Int. J. Numer. Methods Energy*, **20**, 353-367 (1984).

- [14] A. Y. T. Leung and T. C. Fung, 'Non-linear Steady State Vibration of Frames by Finite Element Method', *Int. J. Numer. Methods Energy*, **28**, 1599-1618 (1989).
- [15] O. A. Bauchau and C. H. Hong, 'Nonlinear Response and Stability Analysis of Beams Using Finite Elements in Time', *AIAA J.*, **26** (9), 1135-1142 (1988).
- [16] A. H. Nayfen and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, Wiley-Interscience, New York, 1979.
- [17] K. M. Hsiao, R. T. Yang, and A. C. Lee, 'A Consistent Finite Element Formulation for Nonlinear Dynamic Analysis of Planar Beam', *Int. J. Numer. Methods Energy*, **37**, 75-89 (1994).

表一 不同阻尼係數到達穩態解所需的週期數($p_1 = p_0 \sin \omega t$, $p_2 = 0$)

(a) $\mu = 500 \text{ sec}^{-1}$

$p_0(\text{lb}) \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
80	3	4	5	7	8	16	13	13	13	17	16
200	4	5	6	7	8	10	11	12	18	21	18
320	3	5	5	10	9	9	10	12	14	16	20

(b) $\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$

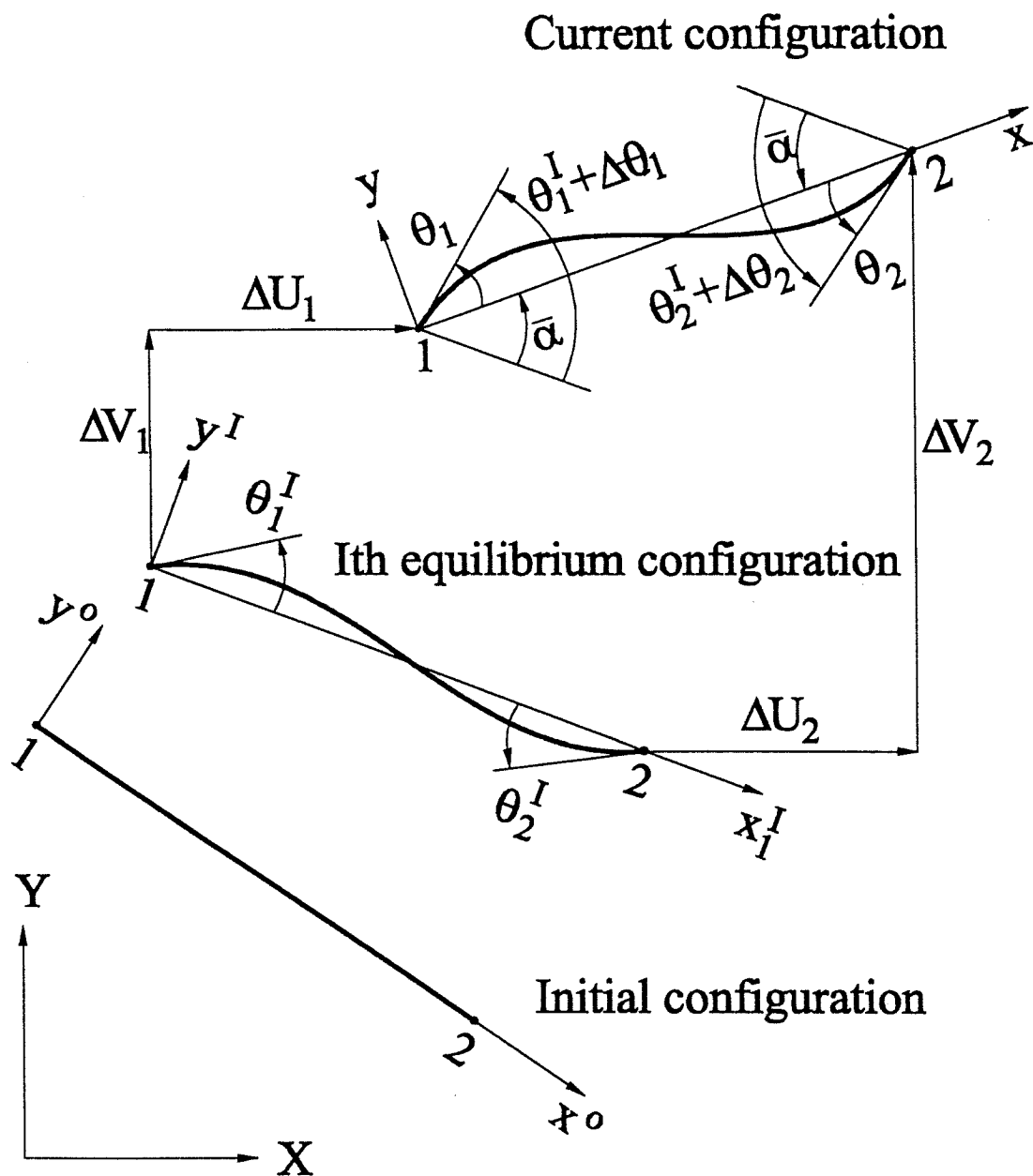
$p_0(\text{lb}) \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
80	8	11	24	25	32	38	47	50	53	142	68
200	8	15	16	24	30	40	45	54	86	—	—
320	22	13	16	88	35	40	41	51	71	99	78

(c) $\mu = 50 \text{ sec}^{-1}$

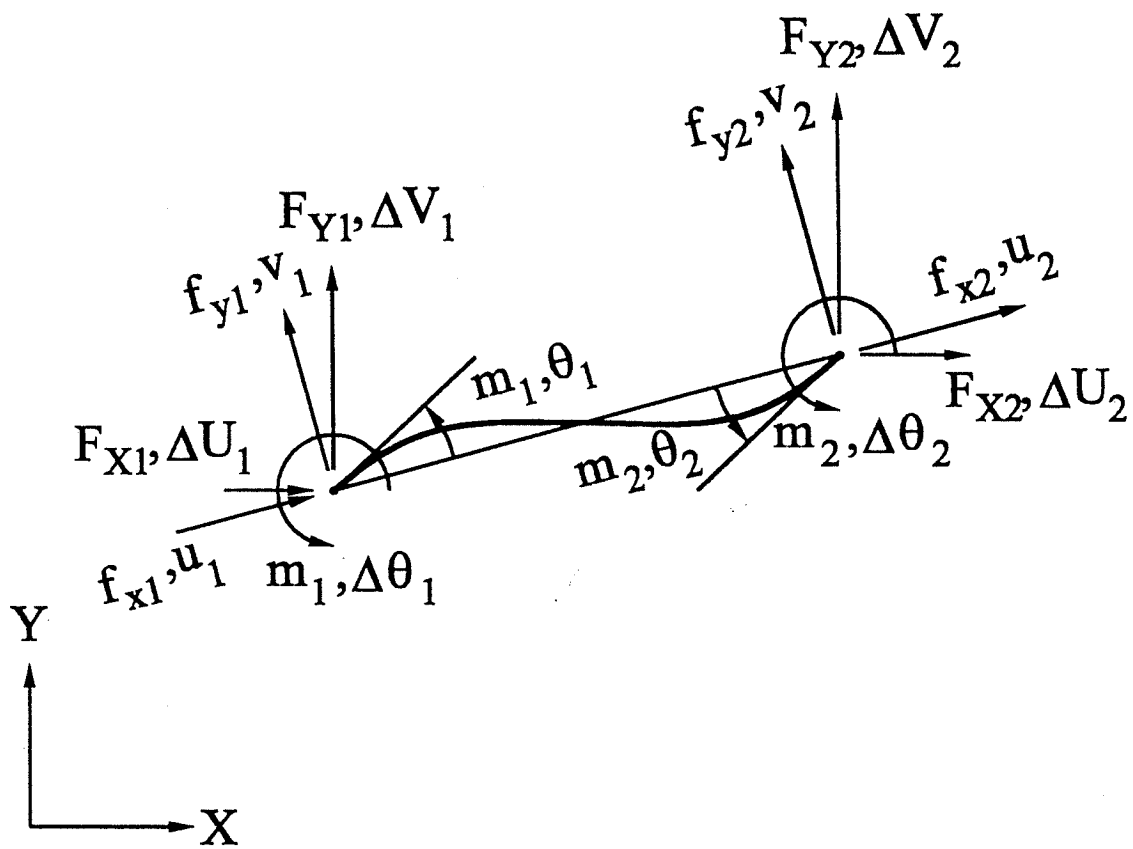
$p_0(\text{lb}) \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
80	14	20	34	48	60	73	88	—	—	—	—
200	23	34	31	57	63	72	—	108	—	—	—
320	51	26	29	53	67	—	—	97	128	—	—

附註： $k = \omega / \omega_p$ ， $\omega_p = 80\pi \text{ rad/sec}$

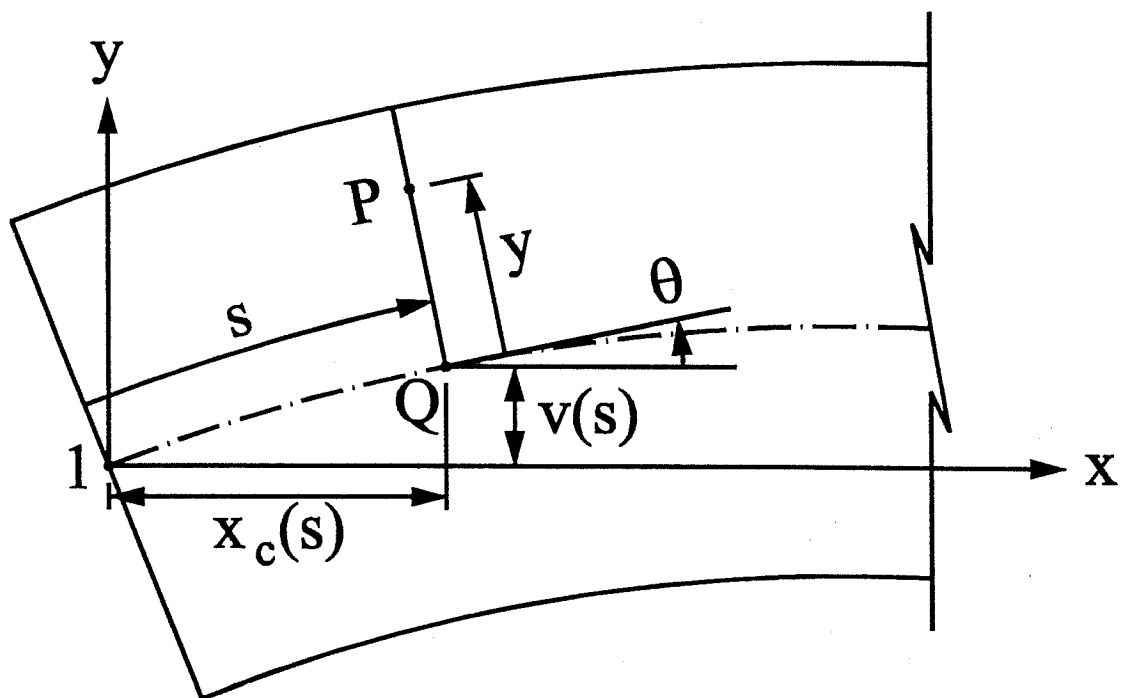
— 沒有求得穩態解



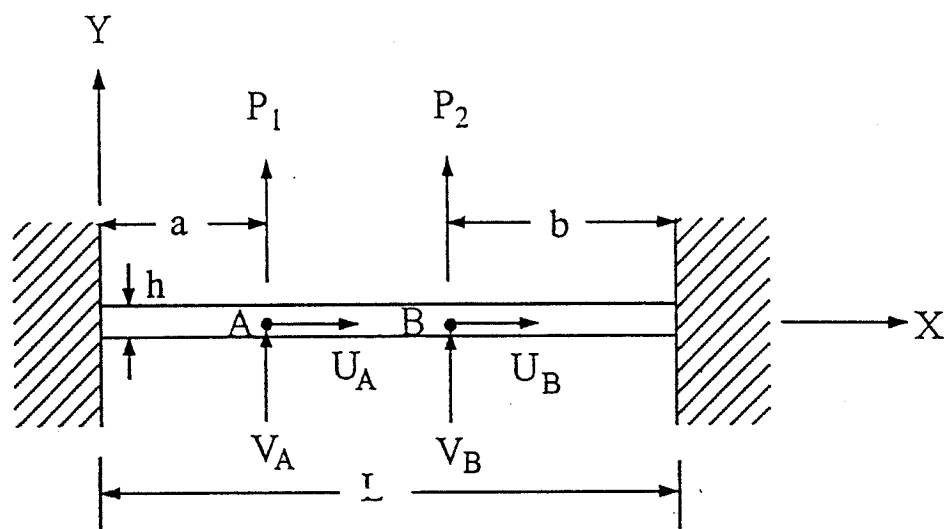
圖一 座標系統



圖二 (a) 節點力、節點位移



圖二 (b) 梁元素上 P 點及 Q 點之位置



$$E = 30000 \text{ ksi}$$

$$L = 20 \text{ in}$$

$$W = \text{Width} = 1 \text{ in}$$

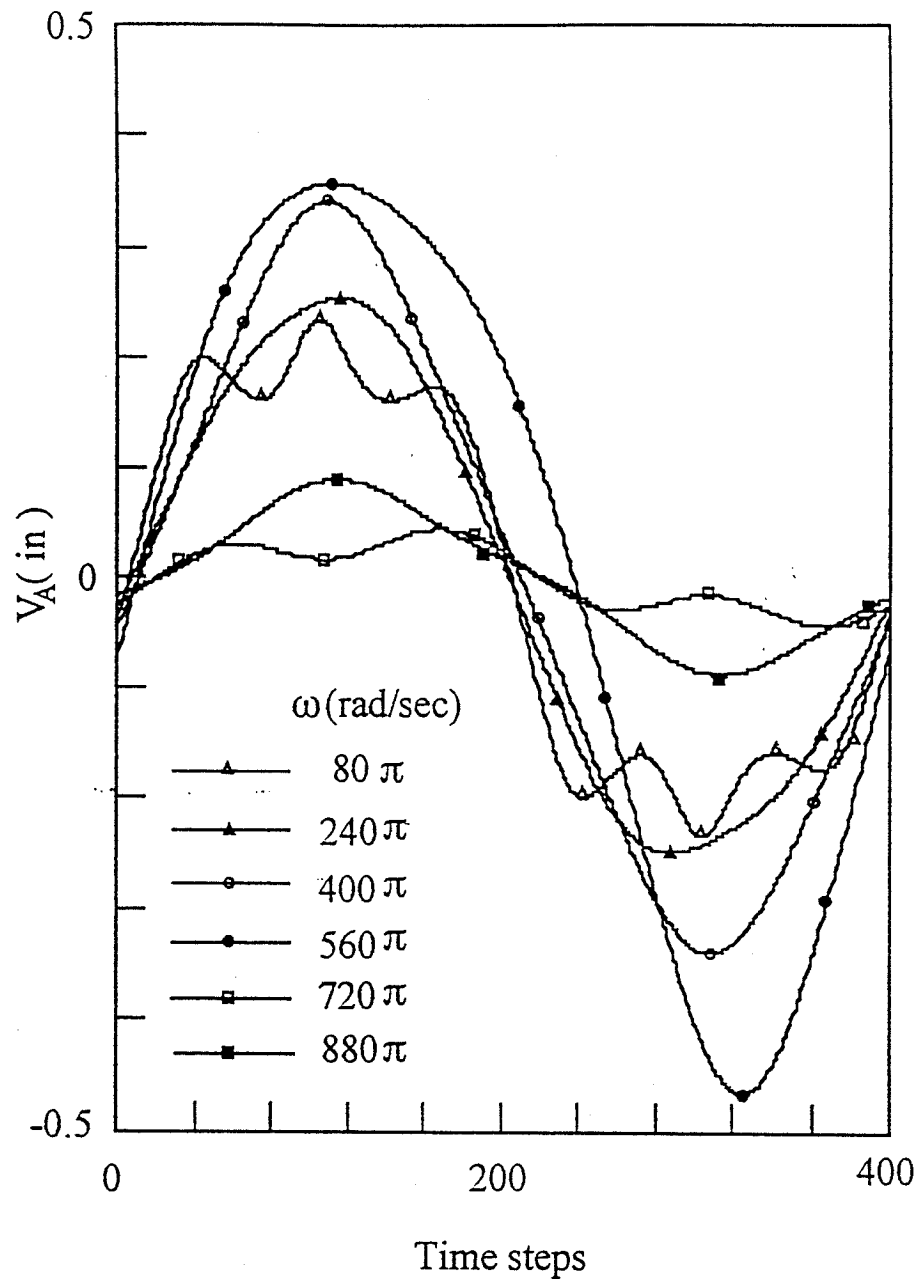
$$h = 1/8 \text{ in}$$

$$\rho = 2.536 \times 10^{-4} \text{ lb} \cdot \text{sec}^2 / \text{in}^4$$

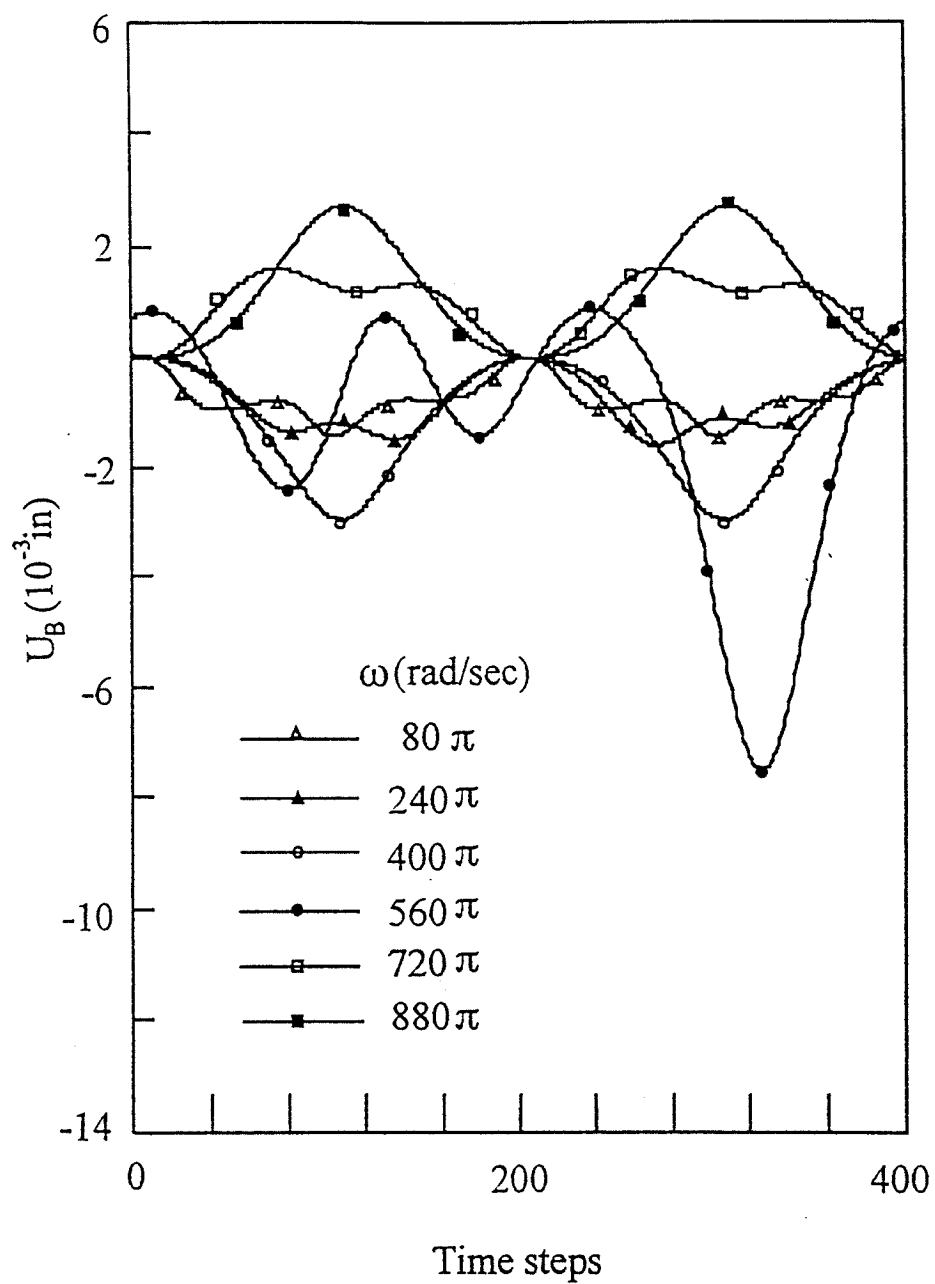
$$a = 7.5 \text{ in}$$

$$b = 10 \text{ in}$$

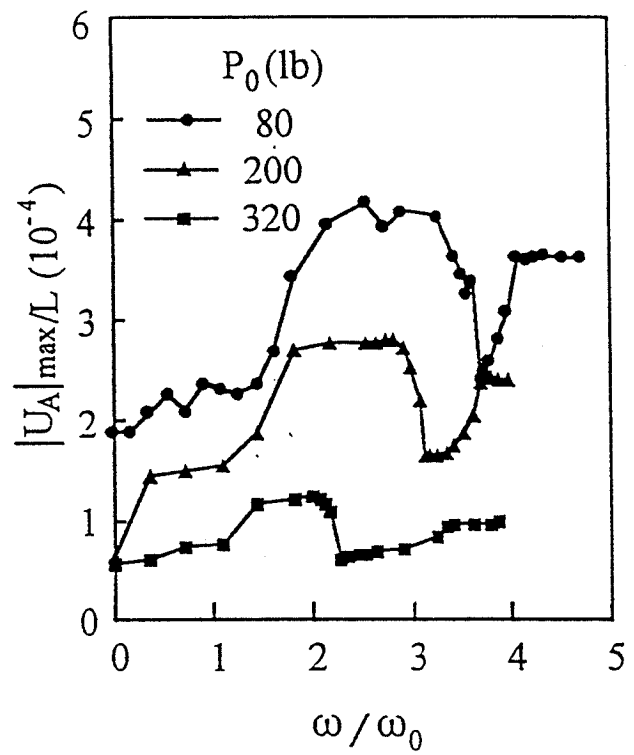
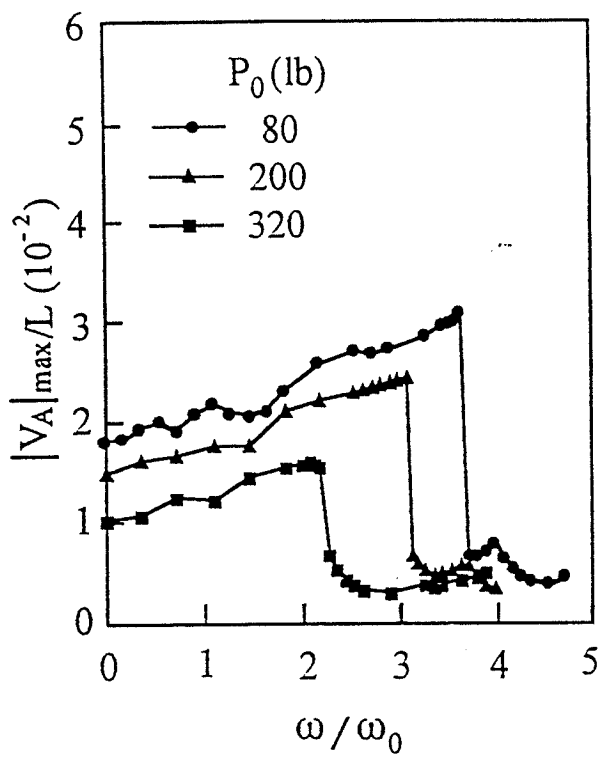
圖三 固端梁之幾何、材料性質與受力圖



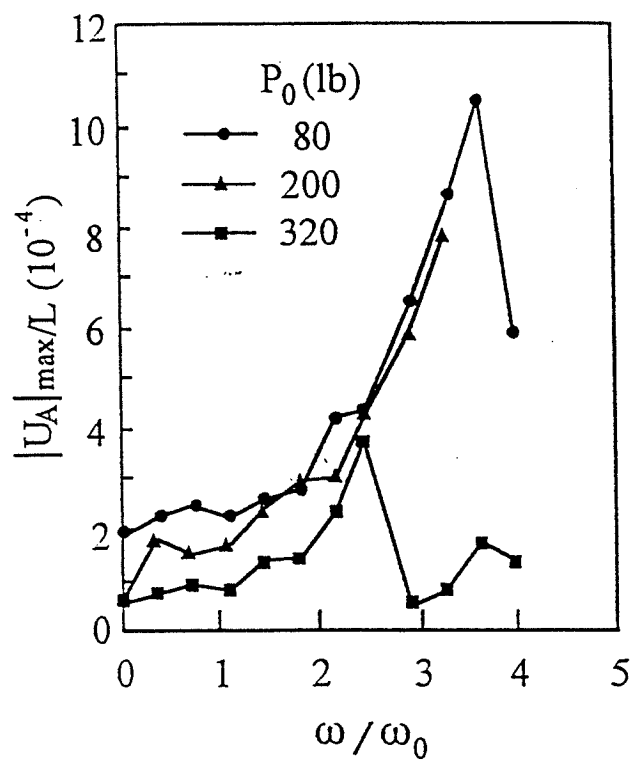
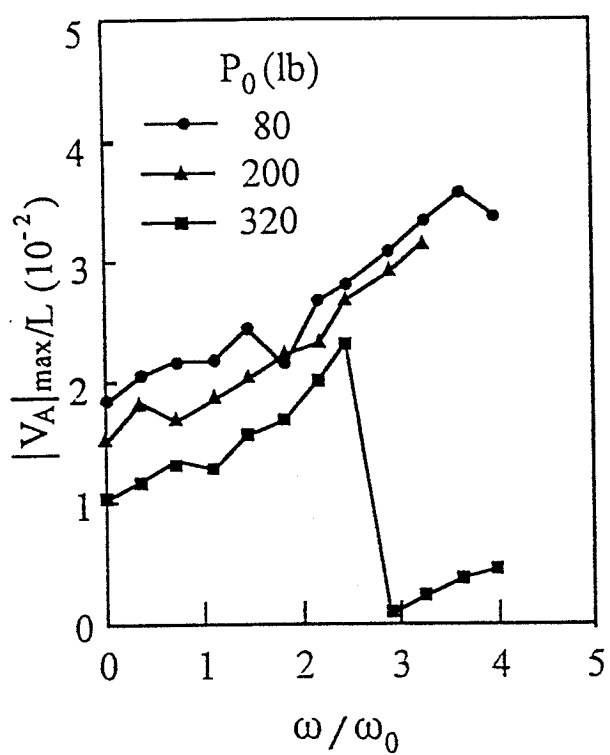
圖四 V_A 在不同頻率的穩態解
 ($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_1 = 80 \sin \omega t \text{ lb}$, $P_2 = 0$)



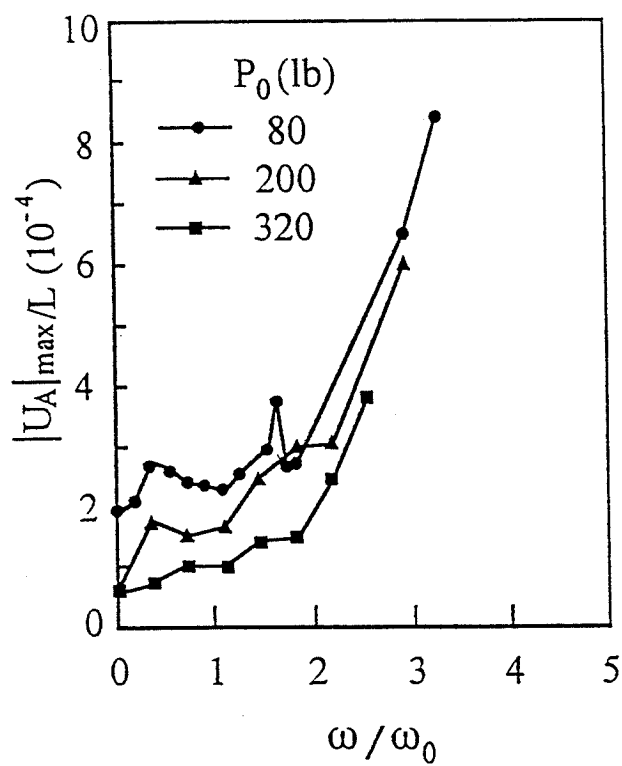
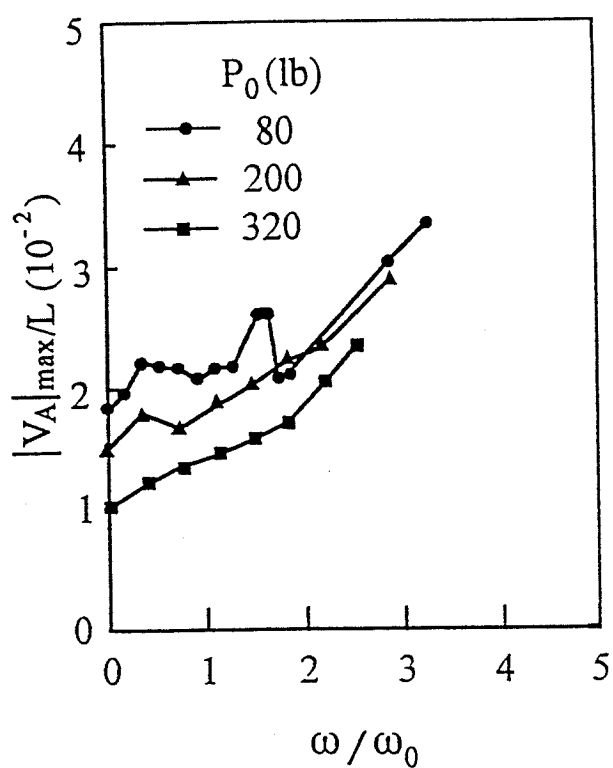
圖五 U_A 在不同頻率的穩態解
 ($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_1 = 80 \sin \omega t \text{ lb}$, $P_2 = 0$)



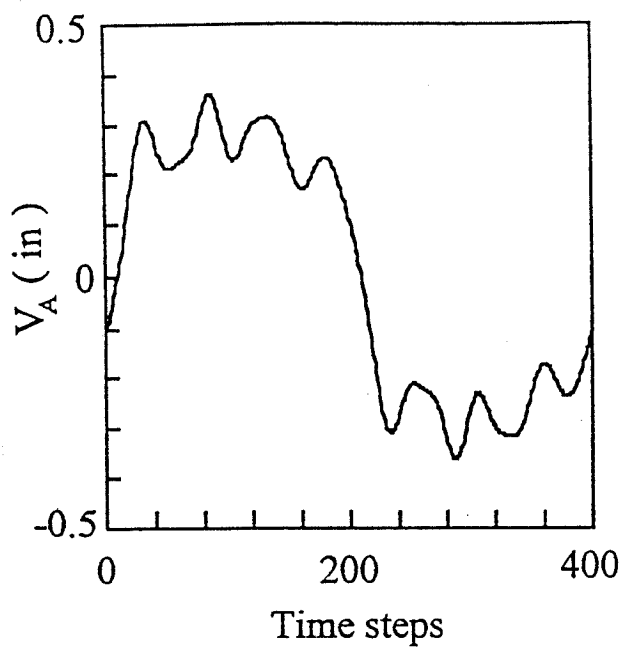
圖六 不同外力大小、頻率改變時 V_A 及 U_A 的振幅變化
 ($\mu = 500 \text{ sec}^{-1}$, $P_1 = P_0 \sin \omega t$, $P_2 = 0$, $\omega_0 = 220.8 \pi \text{ rad/sec}$)



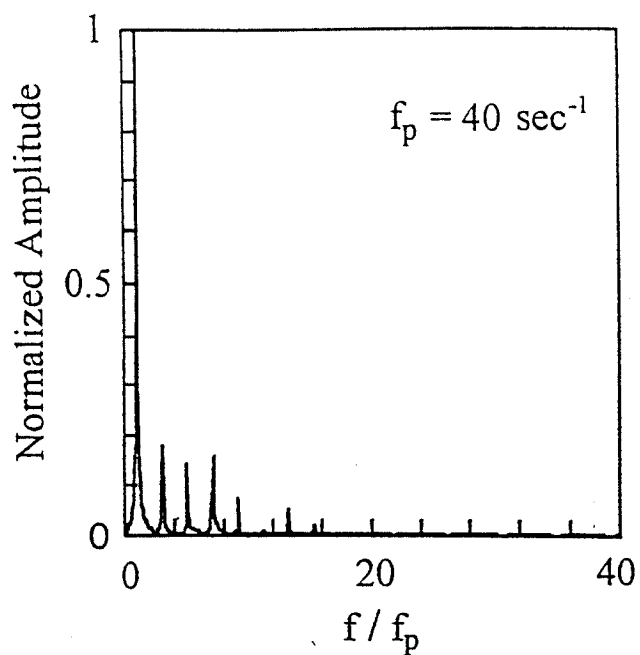
圖七 不同外力大小、頻率改變時 V_A 及 U_A 的振幅變化
 ($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_1 = P_0 \sin \omega t$, $P_2 = 0$, $\omega_0 = 220.8 \pi \text{ rad/sec}$)



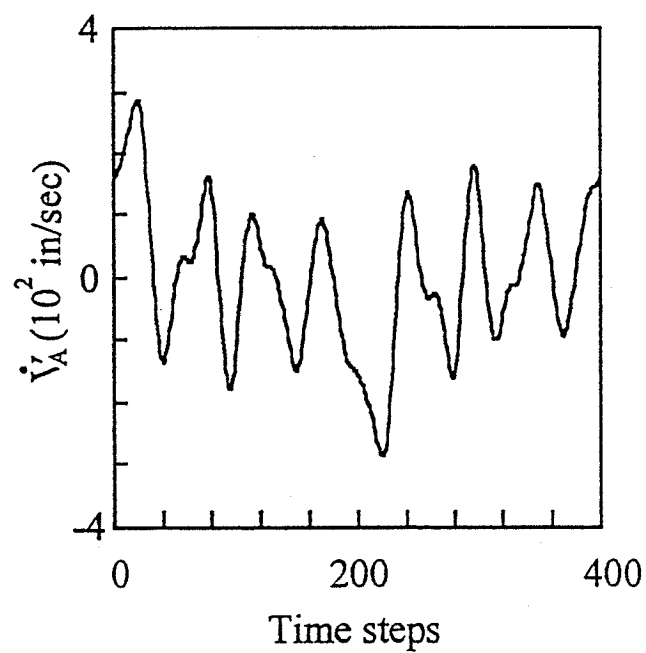
圖八 不同外力大小、頻率改變時 V_A 及 U_A 的振幅變化
 ($\mu = 50 \text{ sec}^{-1}$, $P_1 = P_0 \sin \omega t$, $P_2 = 0$, $\omega_0 = 220.8 \pi \text{ rad/sec}$)



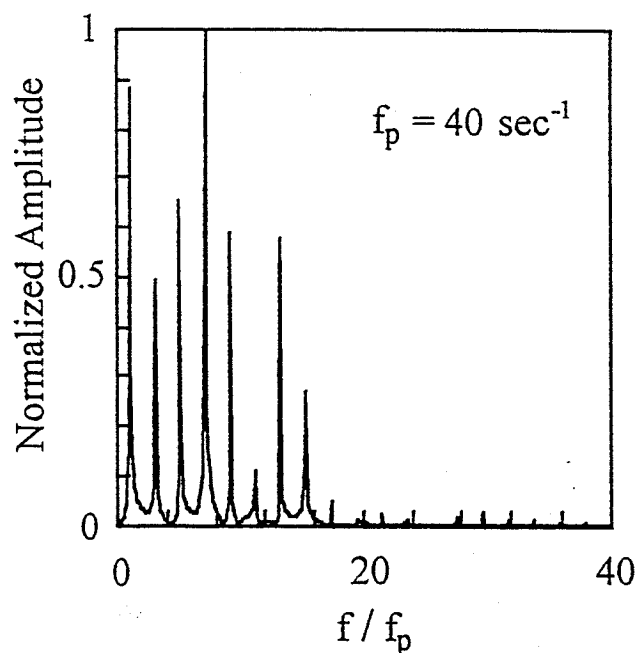
(a)



(b)



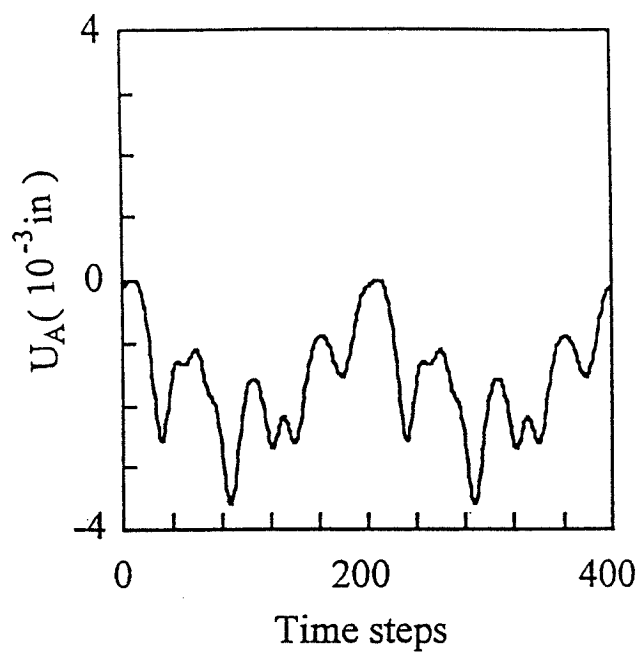
(c)



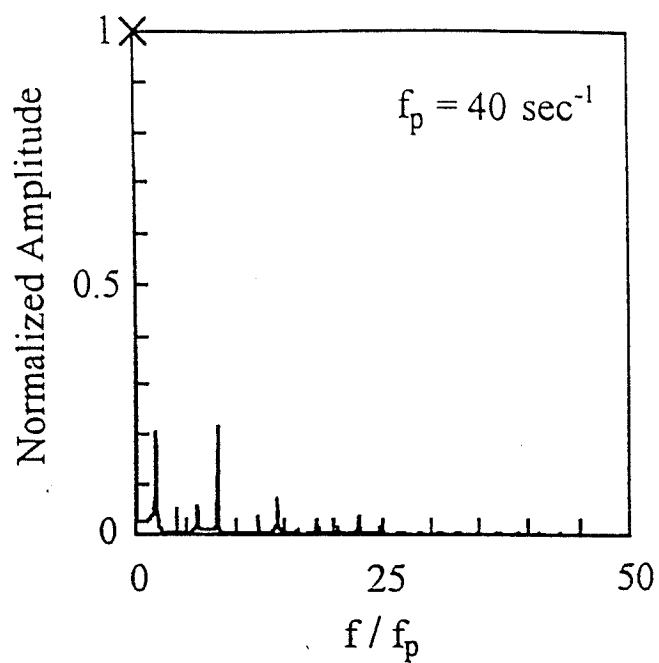
(d)

圖九 V_A 與 $\dot{V}_A$ 的穩態解及其FFT

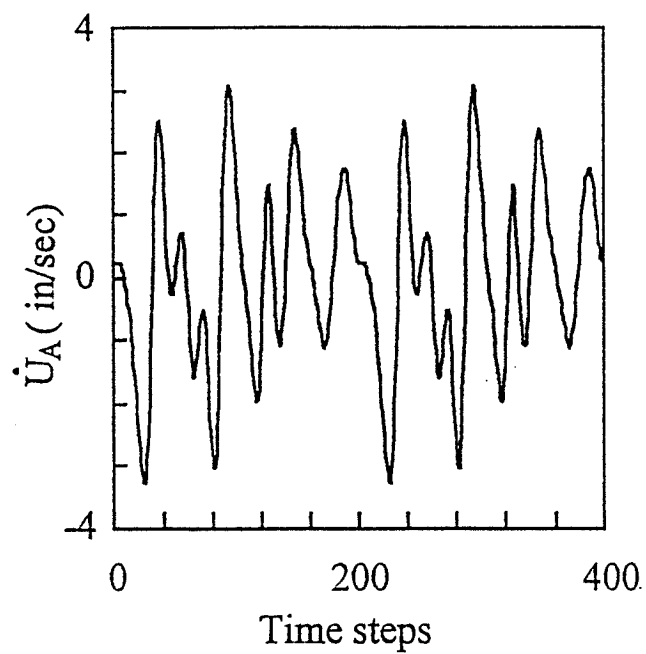
($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_0 = 200 \text{ lb}$, $P_2 = 0$, $\omega = 80 \pi \text{ rad/sec}$)



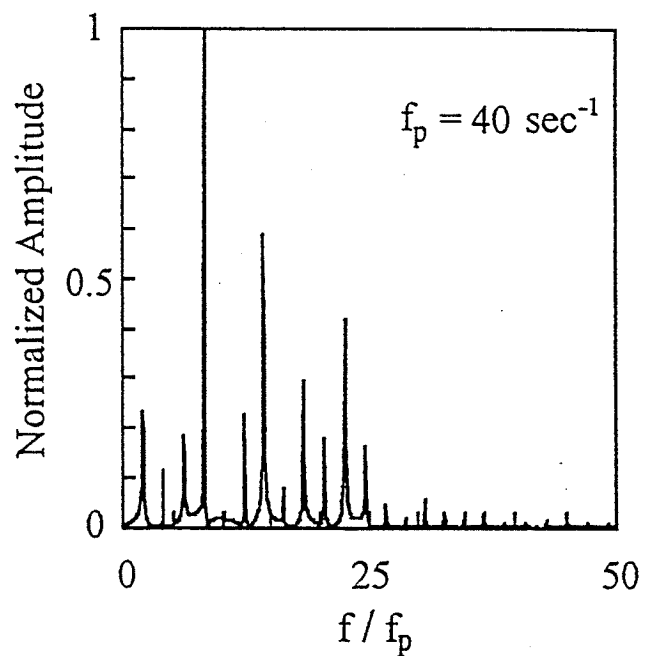
(a)



(b)



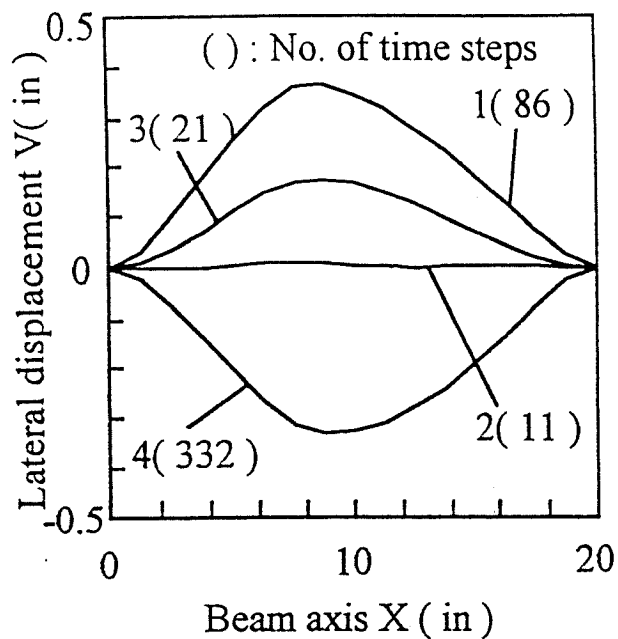
(c)



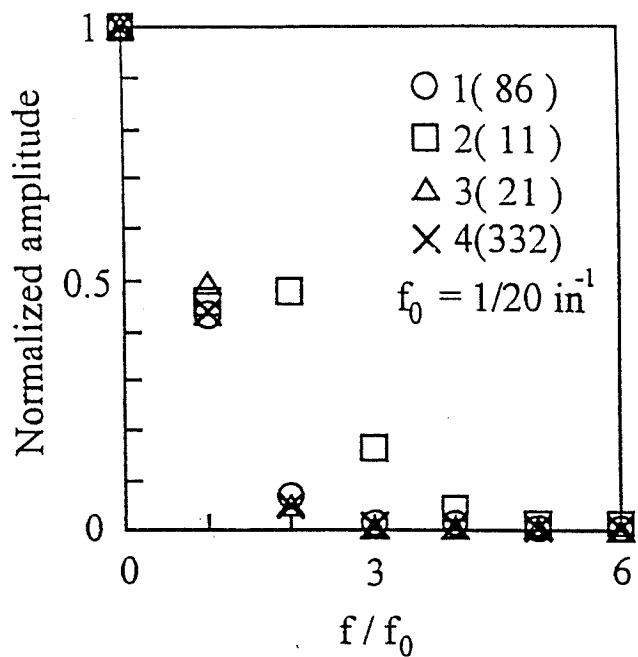
(d)

圖十 U_A 與 $\dot{U}_A$ 的穩態解及其 FFT

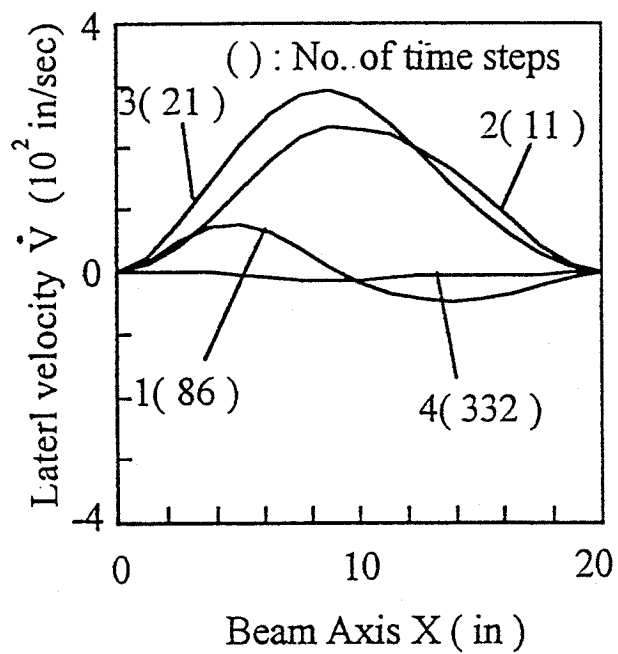
($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_0 = 200 \text{ lb}$, $P_2 = 0$, $\omega = 80 \pi \text{ rad/sec}$)



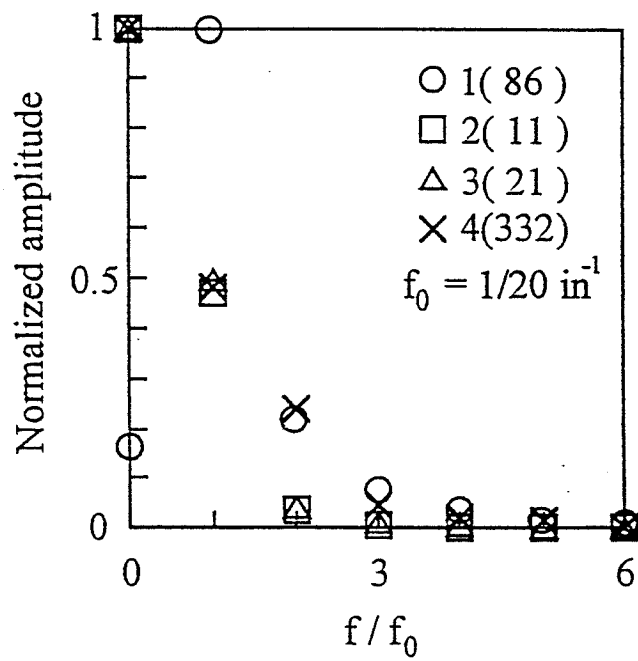
(a)



(b)

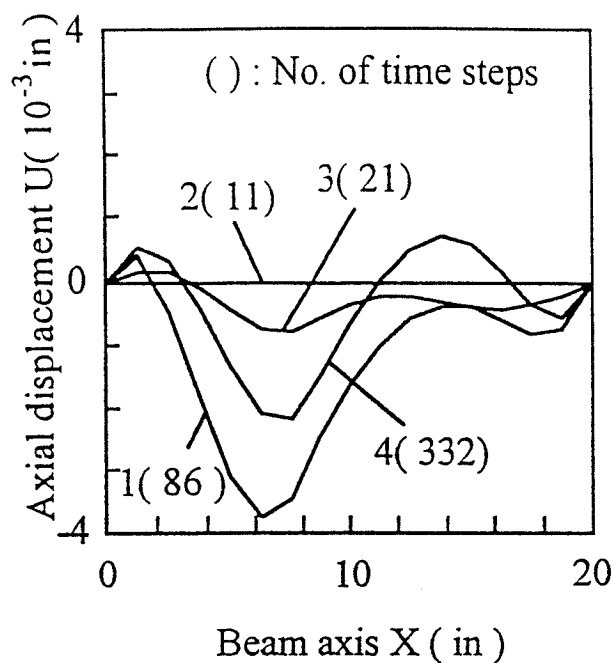


(c)

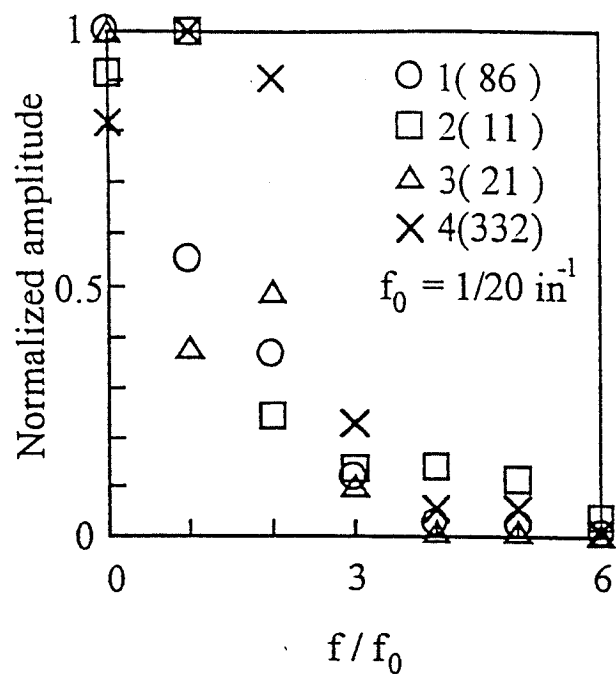


(d)

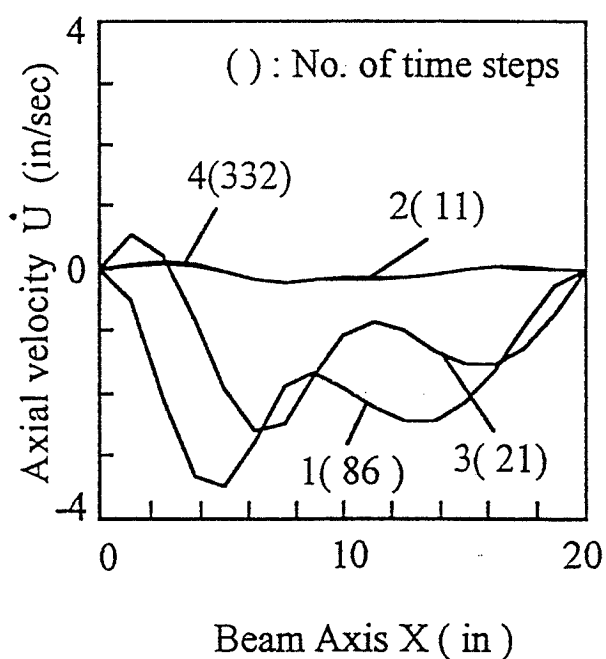
圖十一 側向位移及速度在不同時刻的振形及其FFT
 $(\mu = 100 \text{ sec}^{-1}, P_0 = 200 \text{ lb}, P_2 = 0, \omega = 80 \pi \text{ rad/sec})$



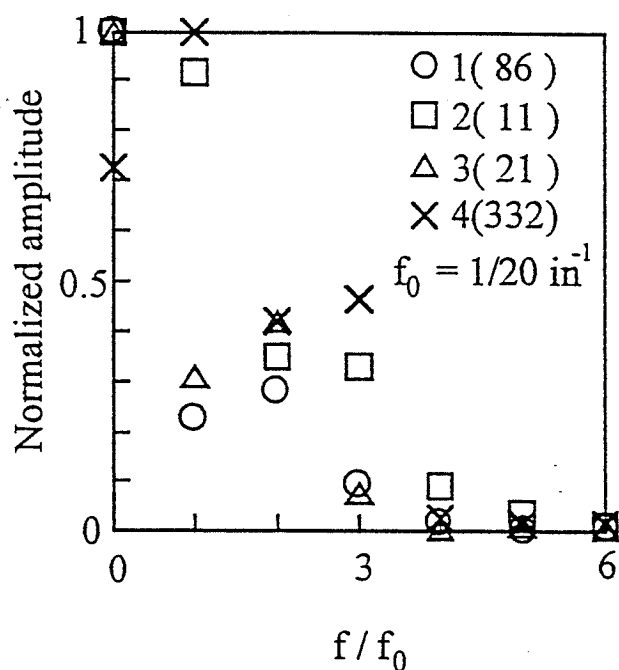
(a)



(b)

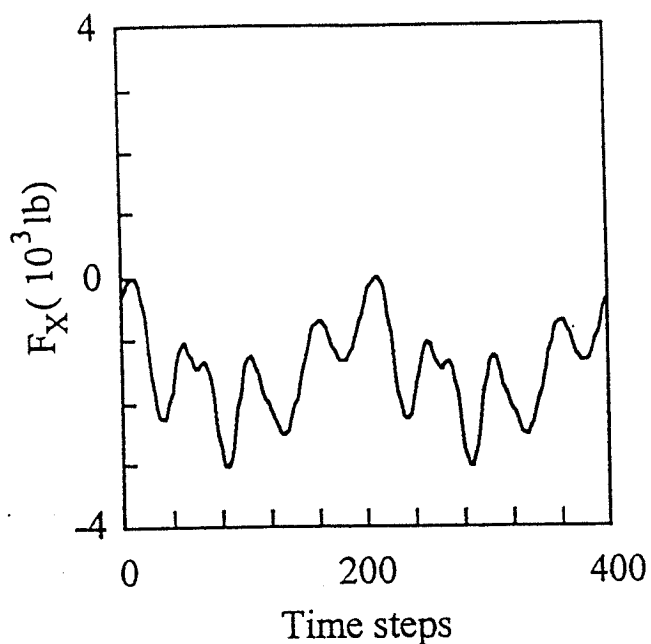


(c)

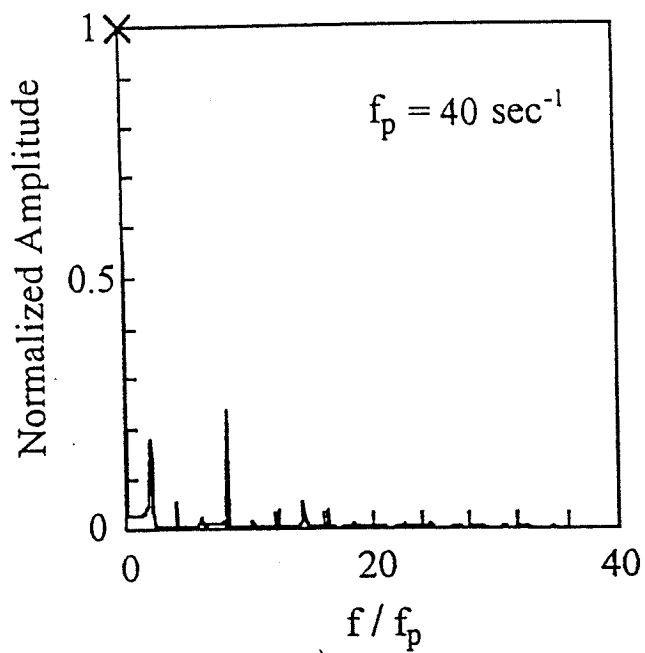


(d)

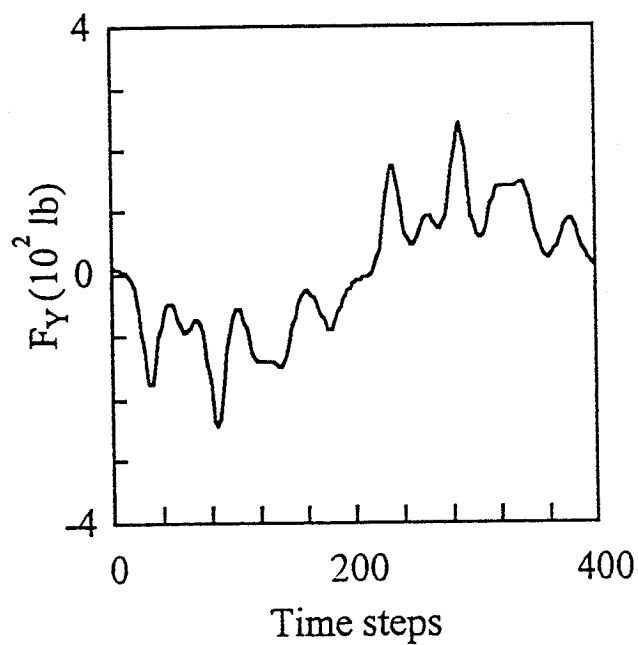
圖十二 軸向位移及速度在不同時刻的振形及其FFT
($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_0 = 200 \text{ lb}$, $P_2 = 0$, $\omega = 80\pi \text{ rad/sec}$)



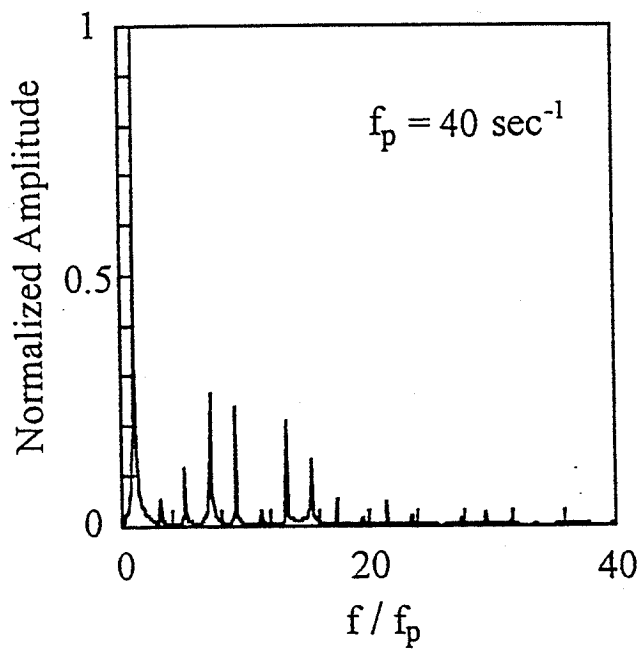
(a)



(b)

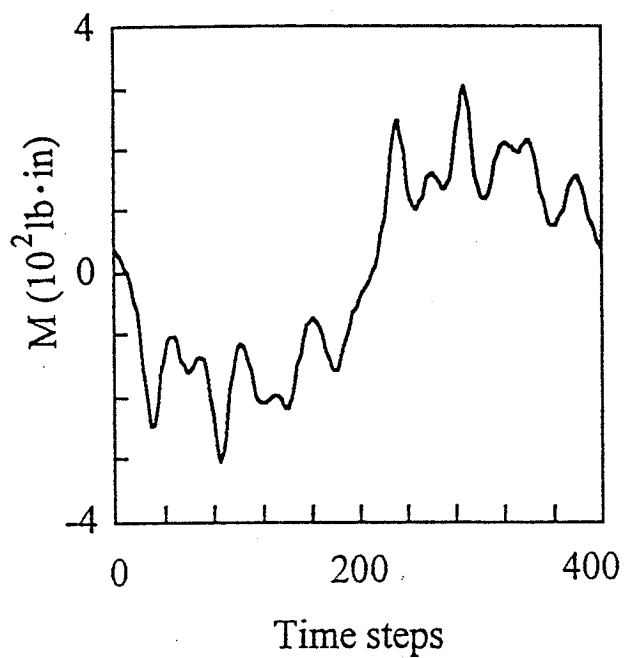


(c)

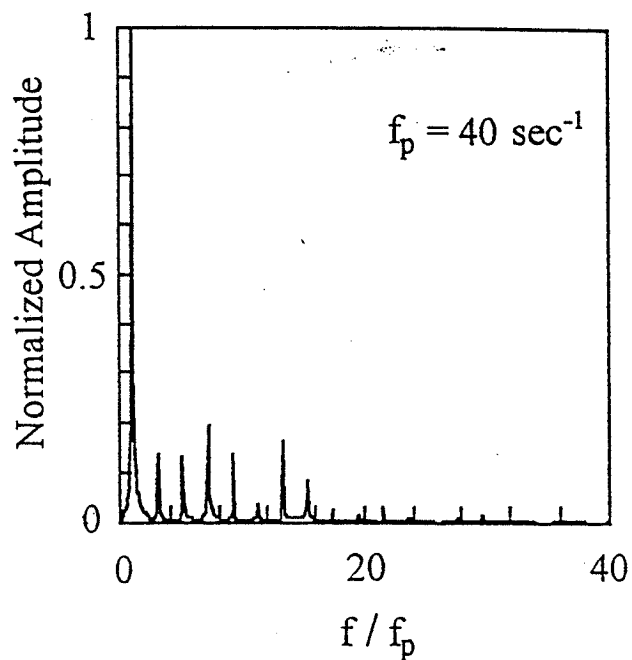


(d)

圖十三 左固定端點反作用力的穩態解及其FFT
($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_0 = 200 \text{ lb}$, $P_2 = 0$, $\omega = 80 \pi \text{ rad/sec}$)



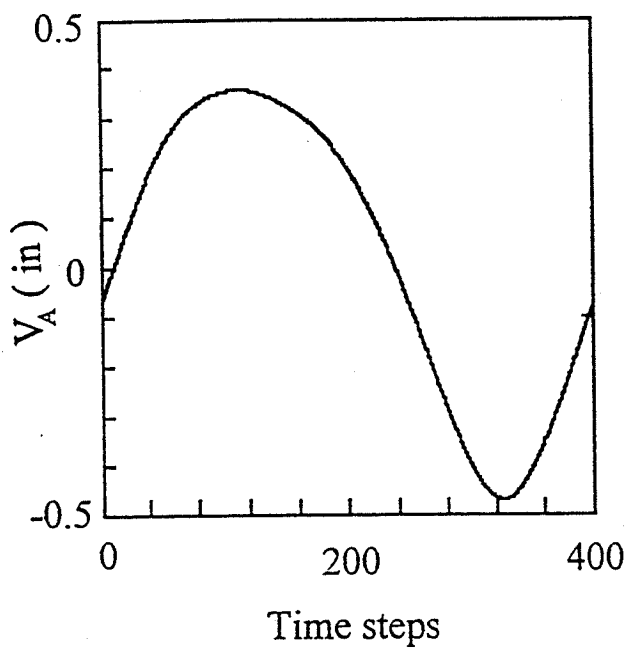
(a)



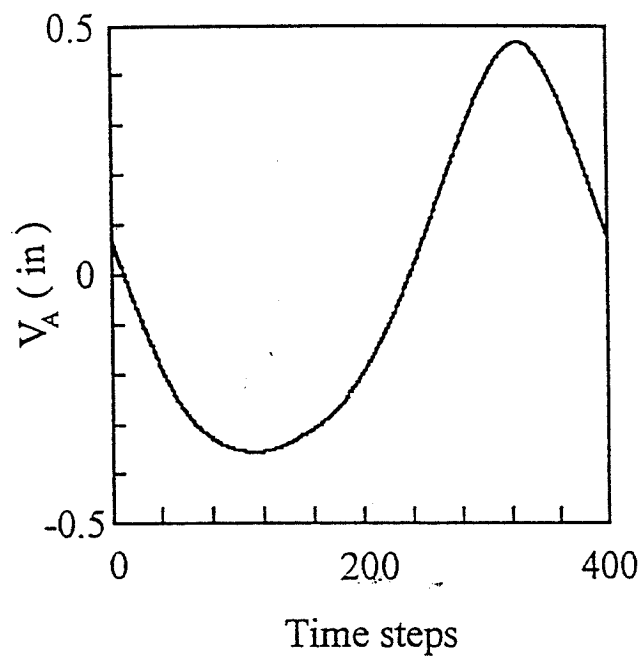
(b)

圖十四 左固定端點反作用彎矩的穩態解及其FFT

($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_0 = 200 \text{ lb}$, $P_2 = 0$, $\omega = 80 \pi \text{ rad/sec}$)

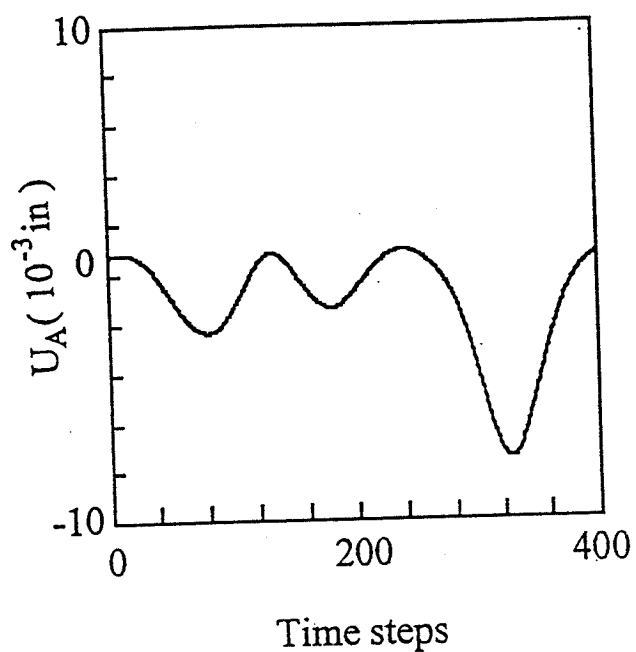


(a) $P_1 = P_0 \sin \omega t$

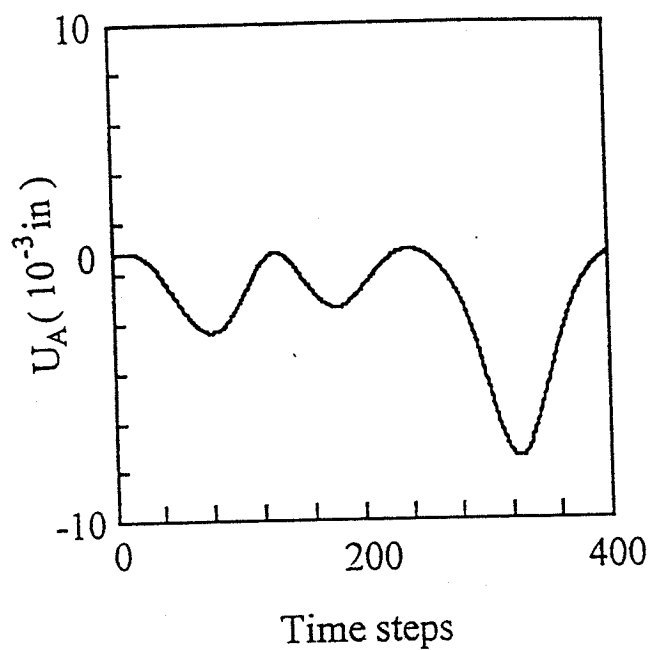


(b) $P_1 = P_0 \sin(\omega t + \pi)$

圖十五 不同初始狀態 V_A 的穩態解
 $(\mu = 100 \text{ sec}^{-1}, P_0 = 80 \text{ lb}, P_2 = 0, \omega = 560\pi \text{ rad/sec})$

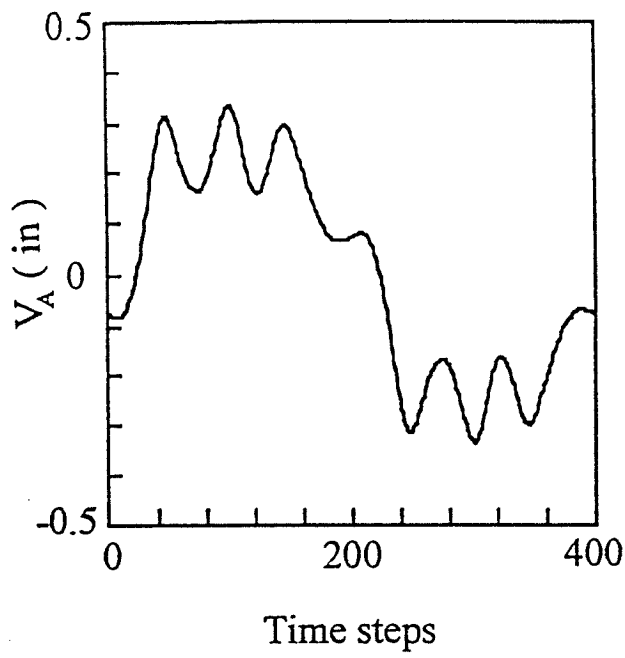


(a) $P_1 = P_0 \sin \omega t$

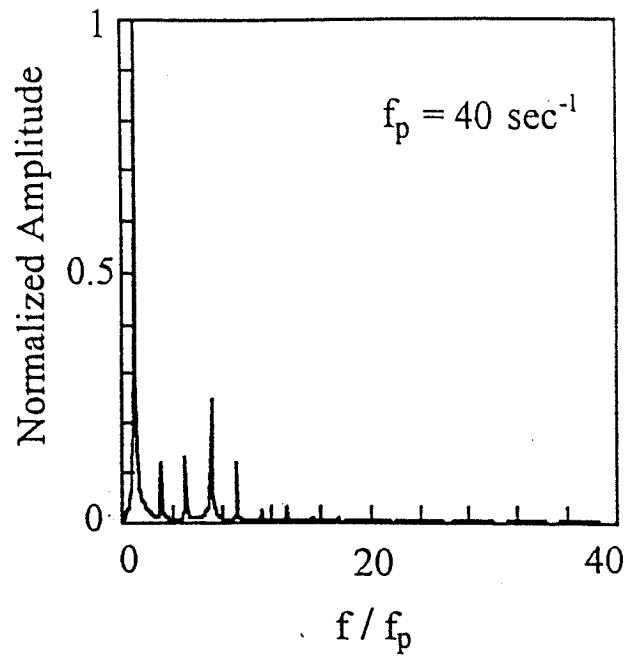


(b) $P_1 = P_0 \sin(\omega t + \pi)$

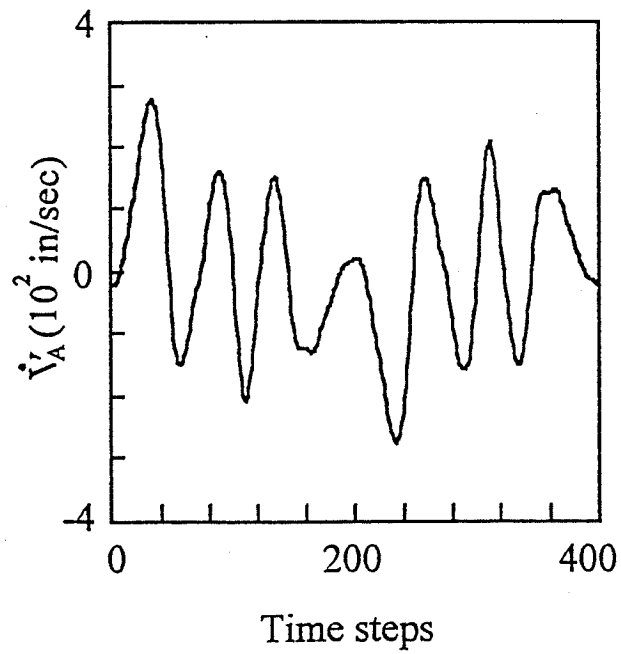
圖十六 不同初始狀態 U_A 的穩態解
($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_0 = 80 \text{ lb}$, $P_2 = 0$, $\omega = 560\pi \text{ rad/sec}$)



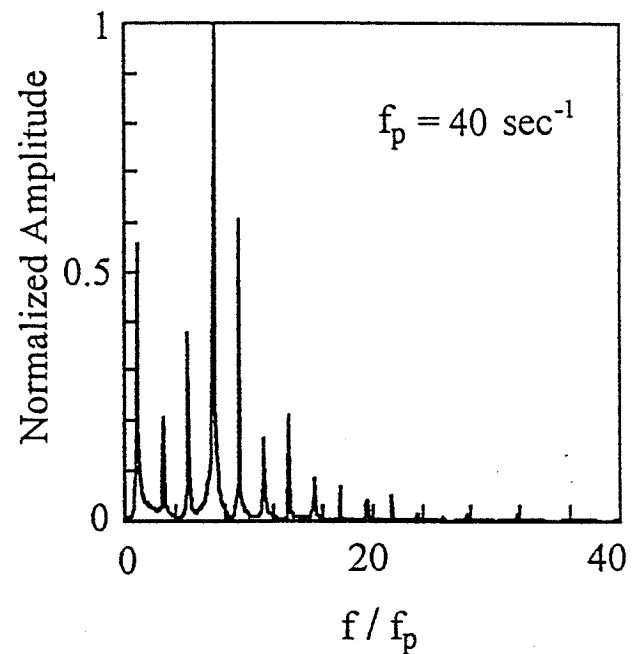
(a)



(b)



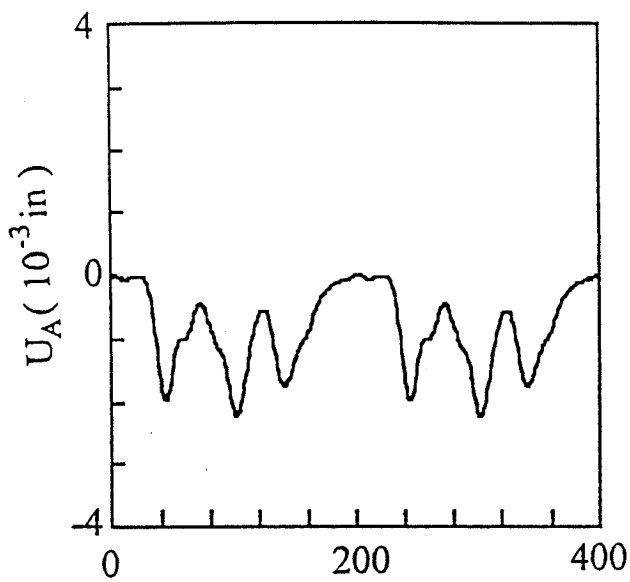
(c)



(d)

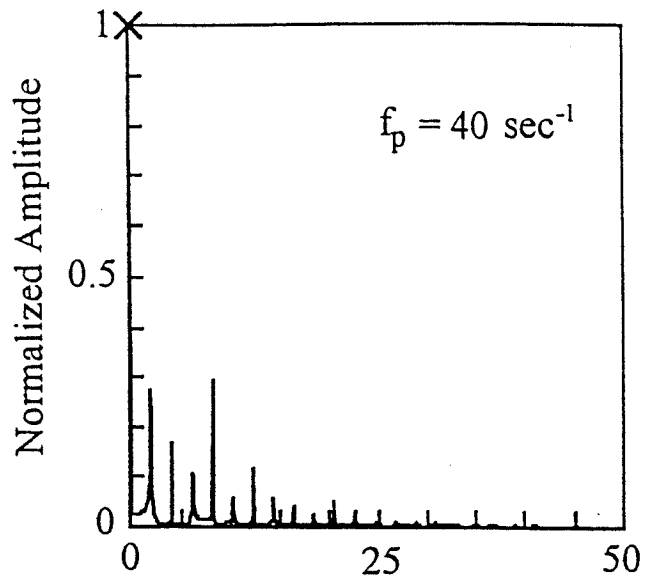
圖十七 V_A 與 $\dot{V}_A$ 的穩態解及其FFT

($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_1 = P_2 = P_0 \sin \omega t$, $P_0 = 80 \text{ lb}$, $\omega = 80 \pi \text{ rad/sec}$)



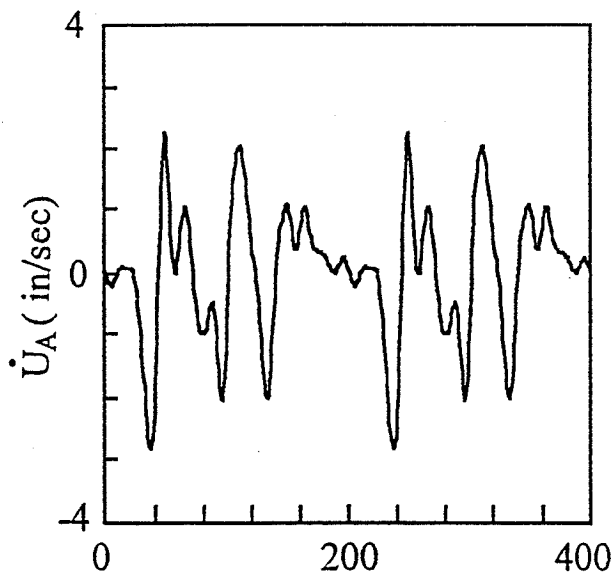
Time steps

(a)



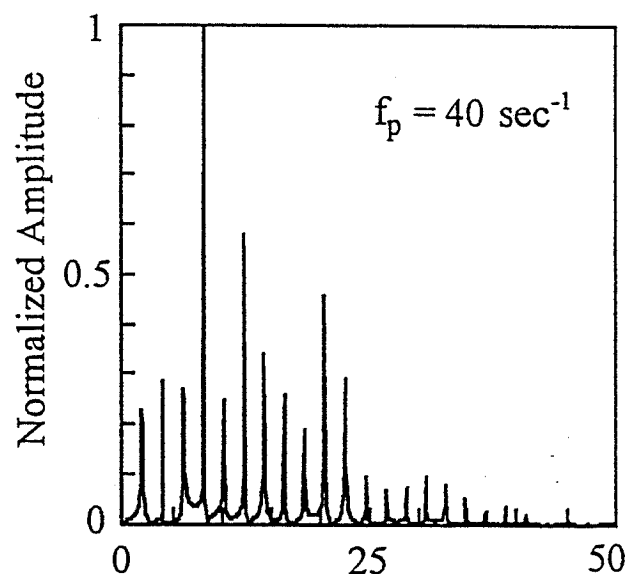
f / f_p

(b)



Time steps

(c)

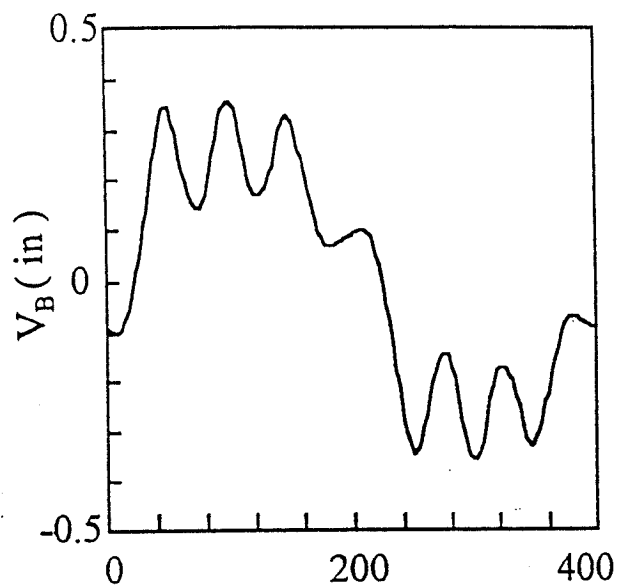


f / f_p

(d)

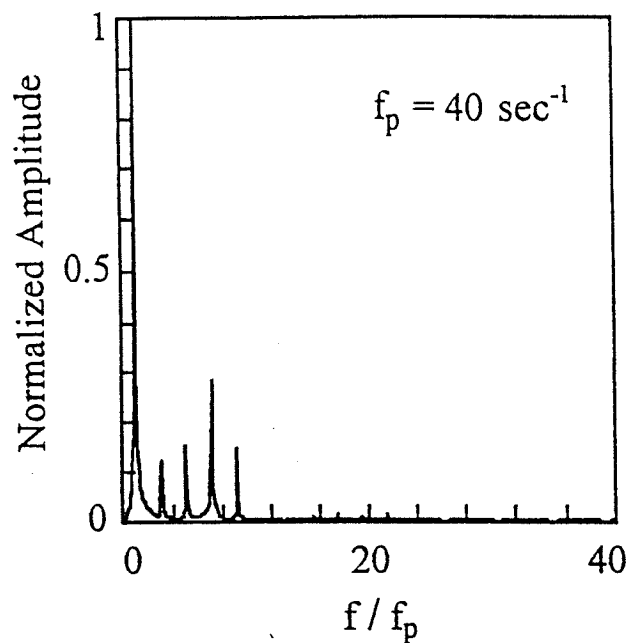
圖十八 U_A 與 $\dot{U}_A$ 的穩態解及其FFT

($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_1 = P_2 = P_0 \sin \omega t$, $P_0 = 80 \text{ lb}$, $\omega = 80 \pi \text{ rad/sec}$)

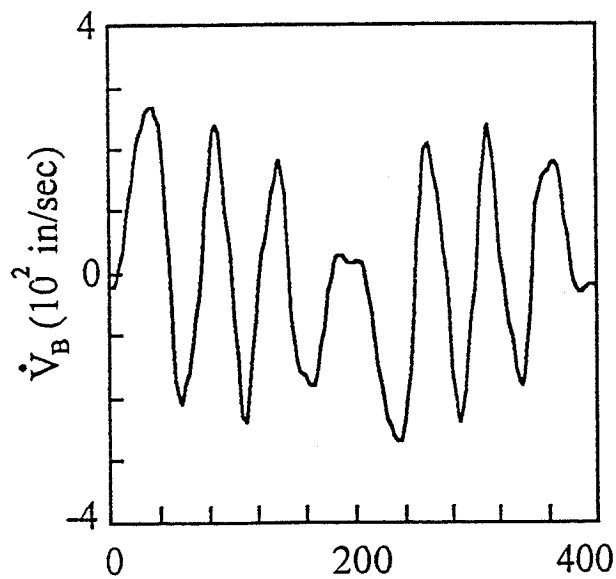


Time steps

(a)

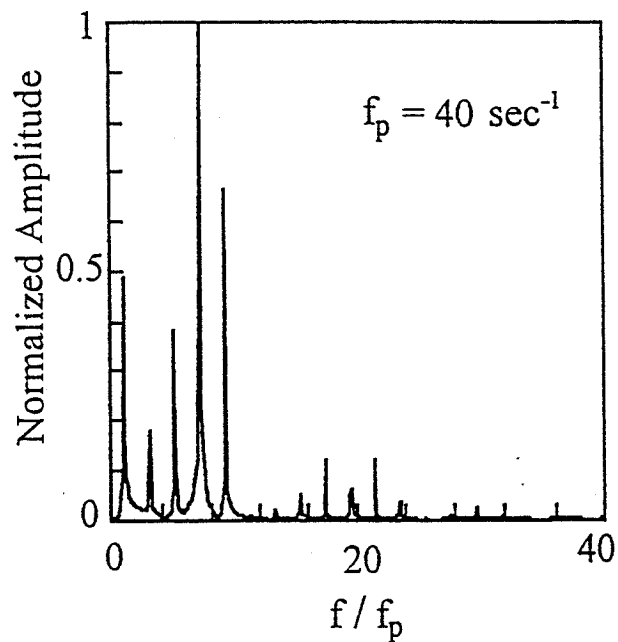


(b)



Time steps

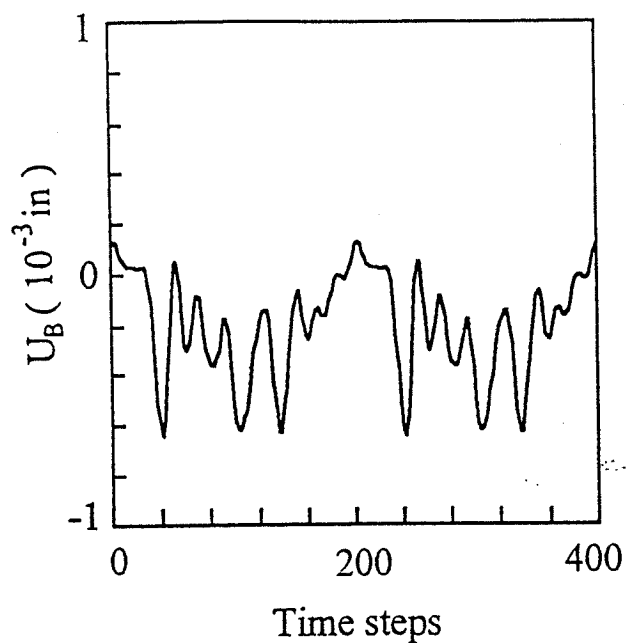
(c)



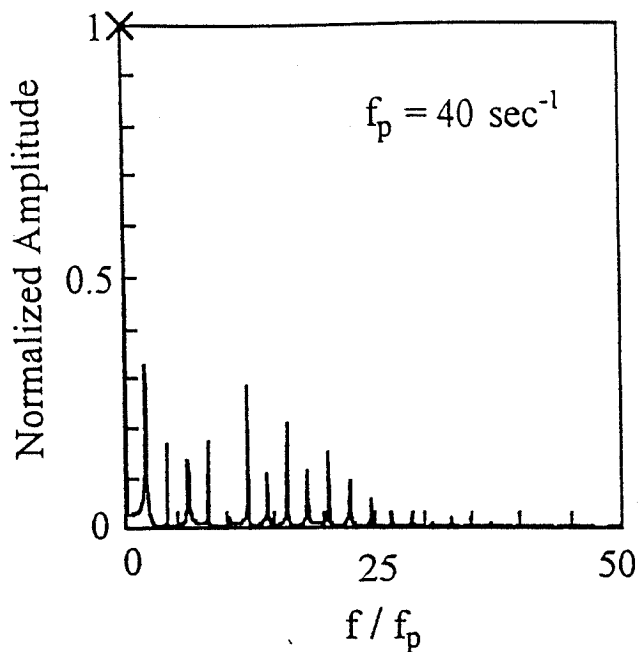
(d)

圖十九 V_B 與 $\dot{V}_B$ 的穩態解及其FFT

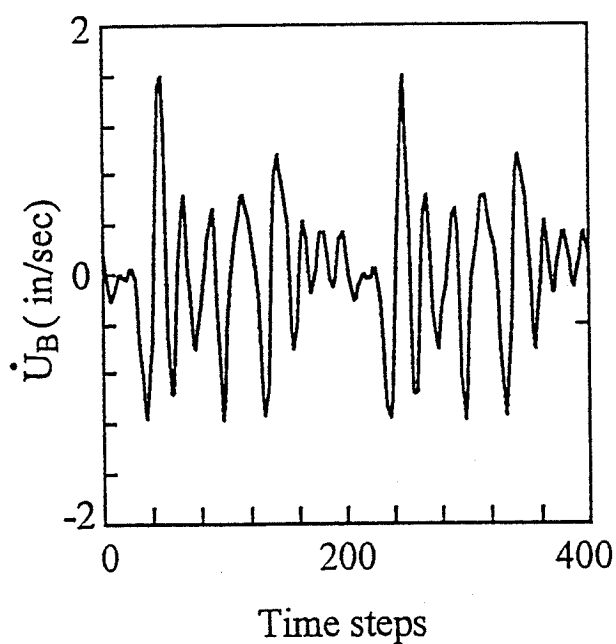
($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_1 = P_2 = P_0 \sin \omega t$, $P_0 = 80 \text{ lb}$, $\omega = 80 \pi \text{ rad/sec}$)



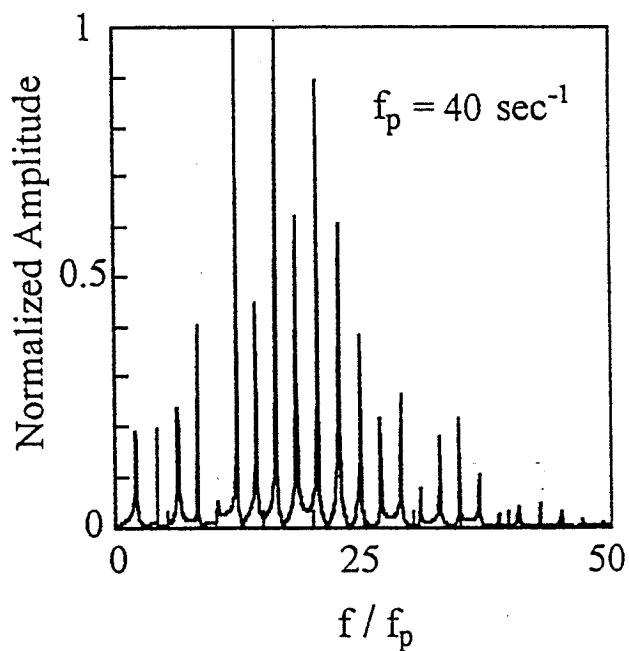
(a)



(b)

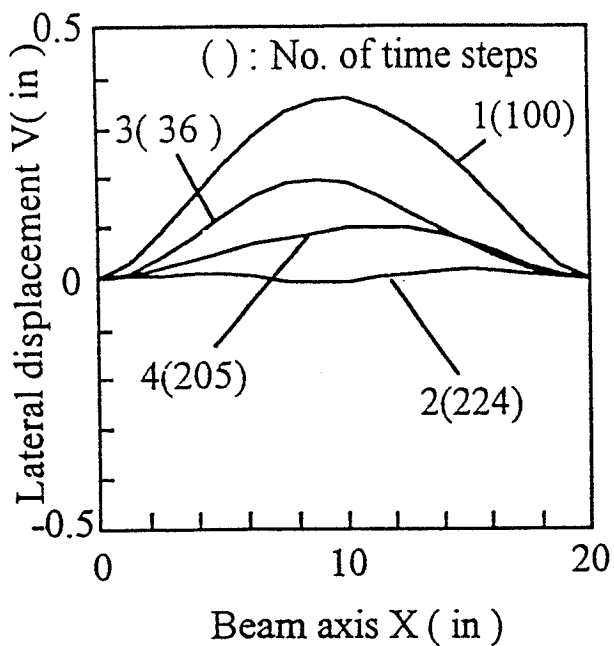


(c)

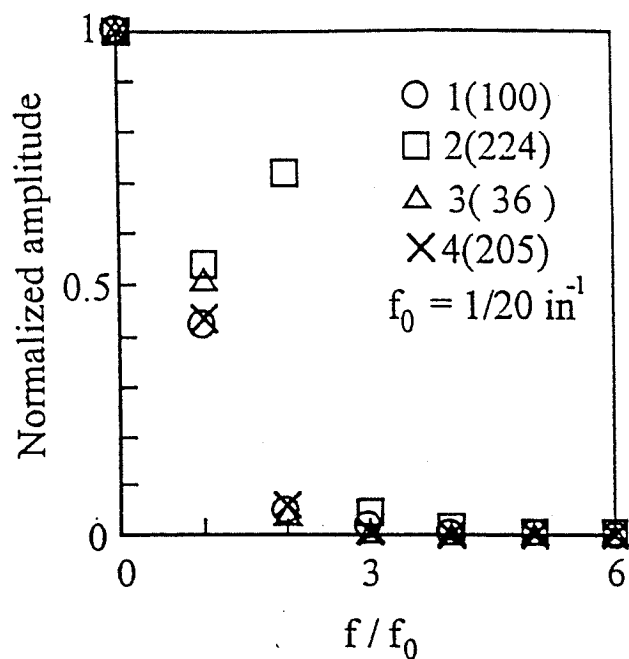


(d)

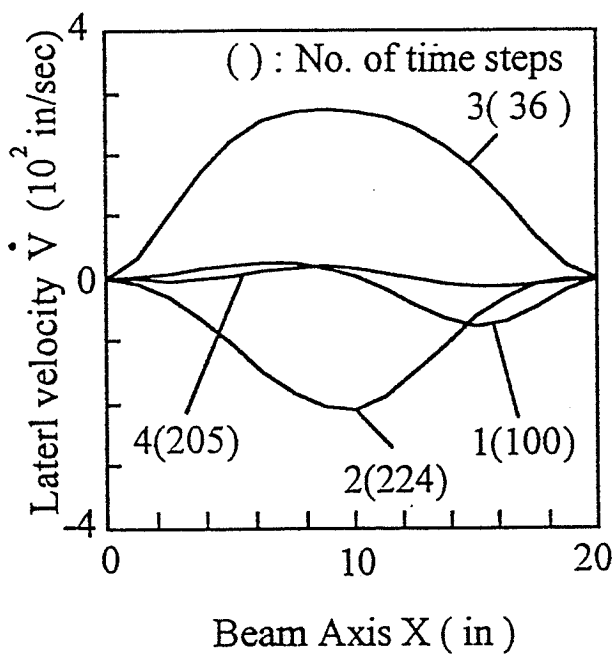
圖二十 U_B 與 $\dot{U}_B$ 的穩態解及其FFT
 ($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_1 = P_2 = P_0 \sin \omega t$, $P_0 = 80 \text{ lb}$, $\omega = 80 \pi \text{ rad/sec}$)



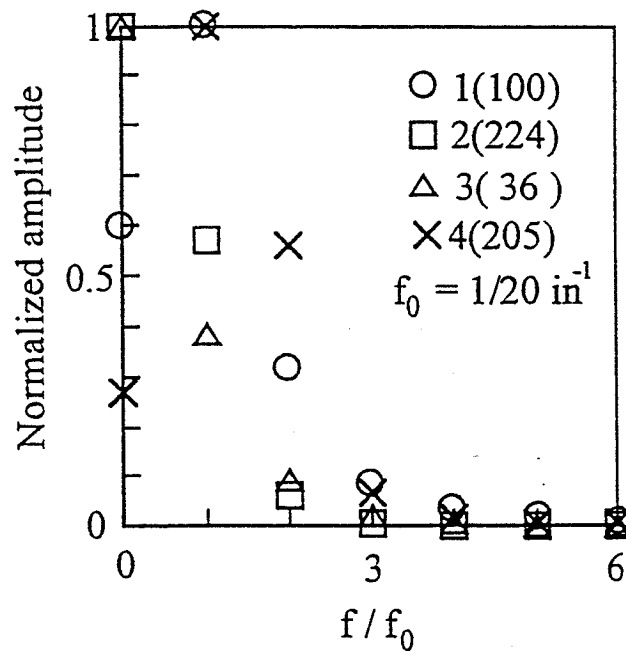
(a)



(b)

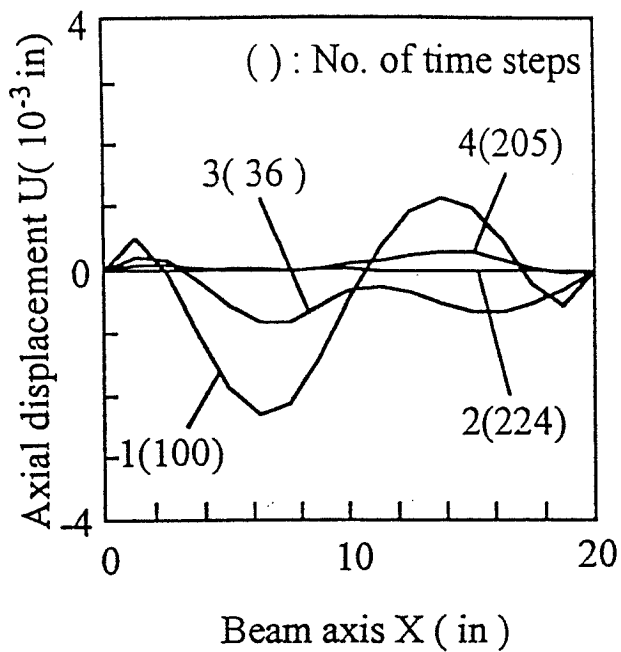


(c)

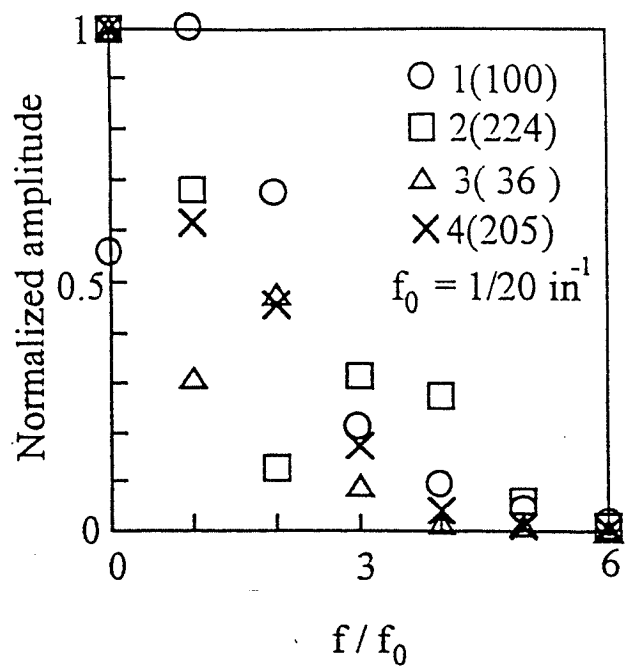


(d)

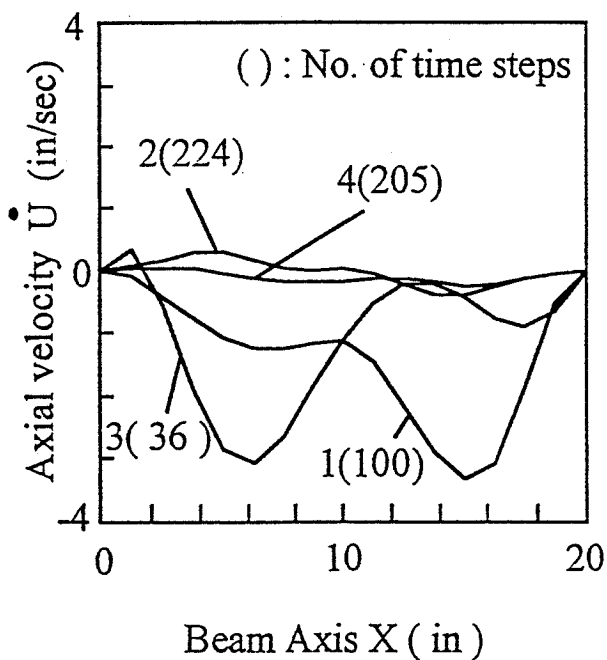
圖二十一 側向位移及速度在不同時刻的振形及其FFT
 $(\mu = 100 \text{ sec}^{-1}, P_1 = P_2 = P_0 \sin \omega t, P_0 = 80 \text{ lb}, \omega = 80 \pi \text{ rad/sec})$



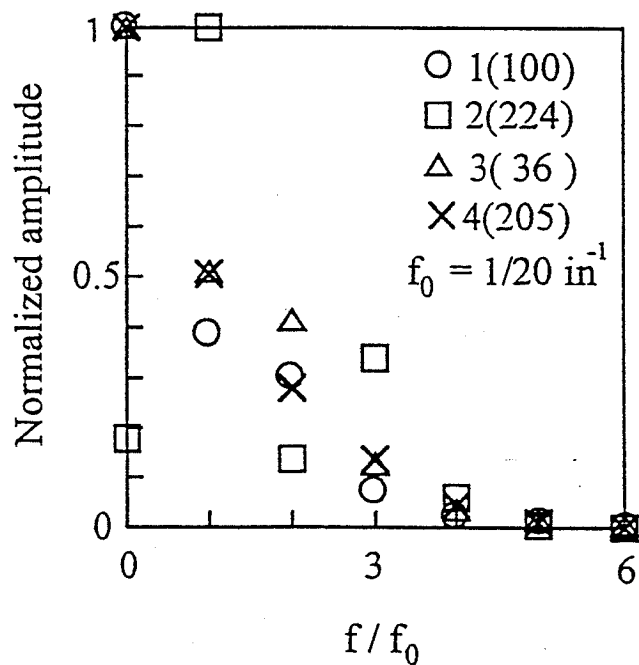
(a)



(b)

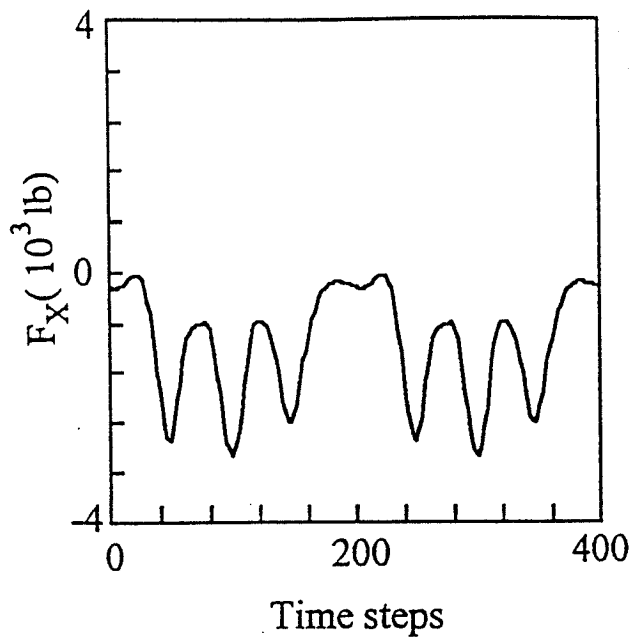


(c)

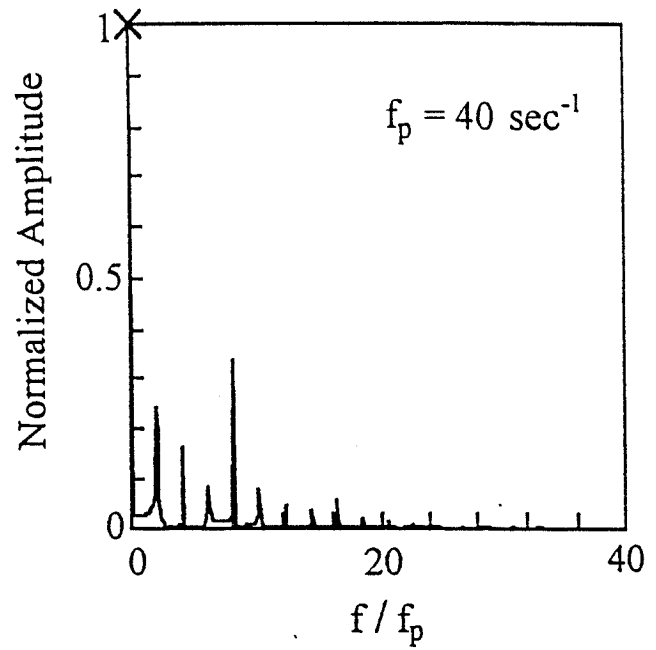


(d)

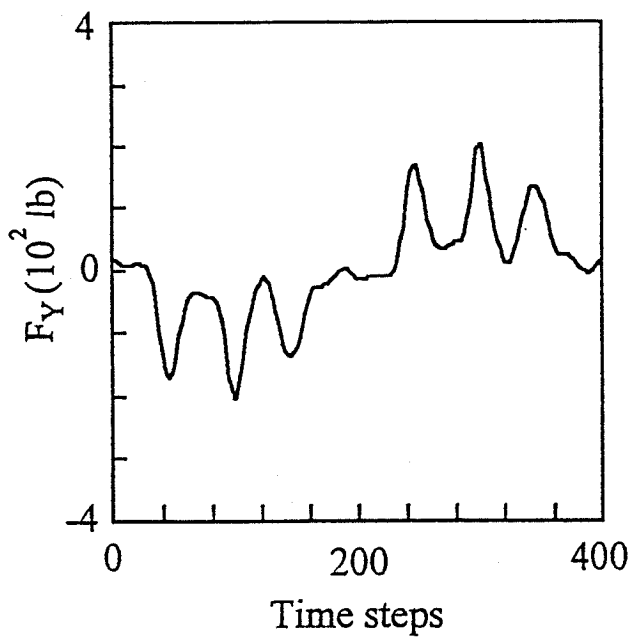
圖二十二 軸向位移及速度在不同時刻的振形及其FFT
 $(\mu = 100 \text{ sec}^{-1}, P_1 = P_2 = P_0 \sin \omega t, P_0 = 80 \text{ lb}, \omega = 80 \pi \text{ rad/sec})$



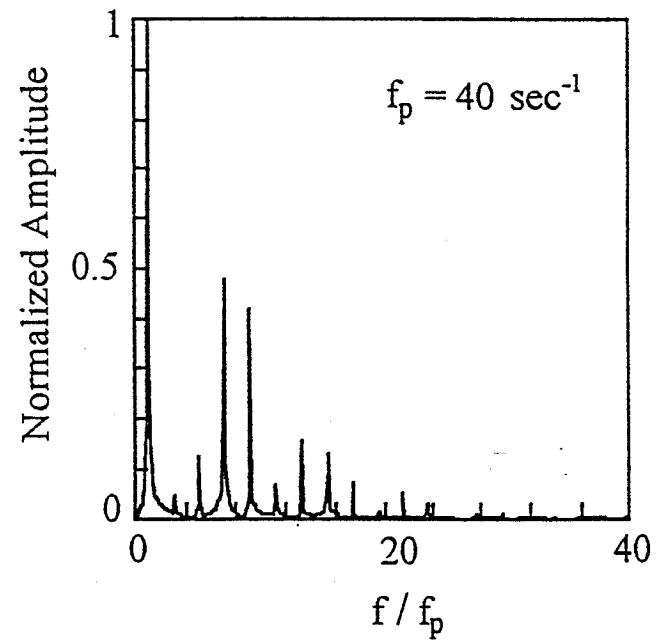
(a)



(b)

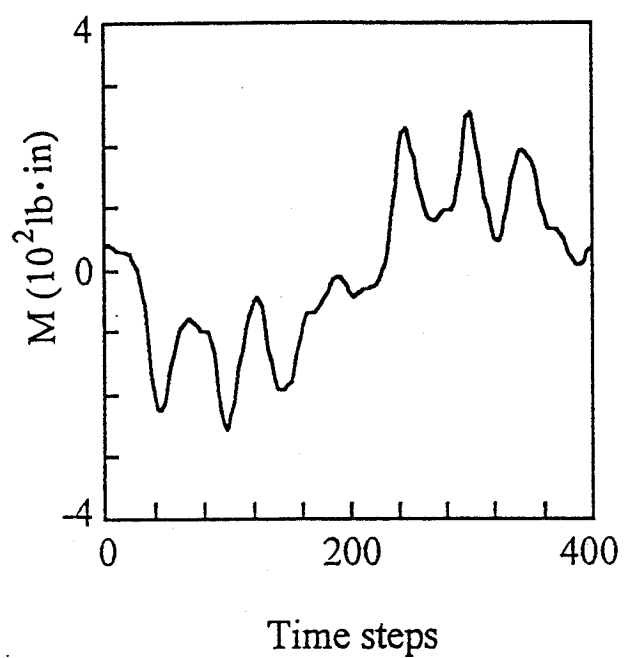


(c)

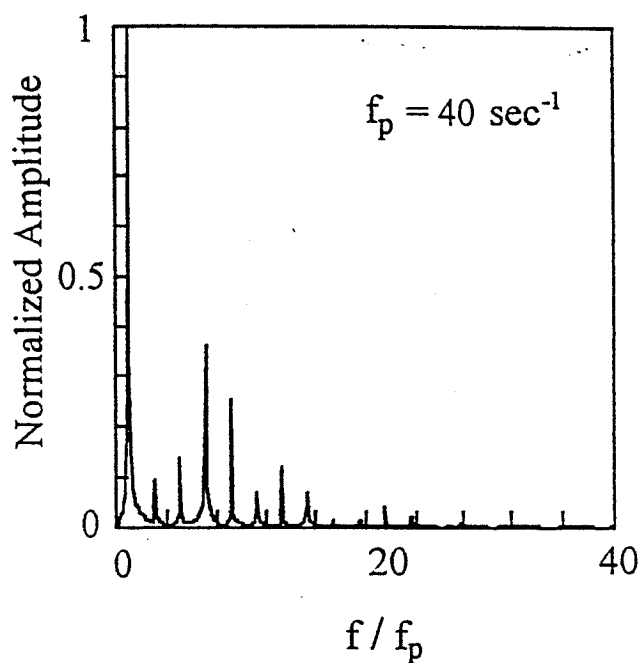


(d)

圖二十三 左固定端點反作用力的穩態解及其FFT
($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$, $P_1 = P_2 = P_0 \sin \omega t$, $P_0 = 80 \text{ lb}$, $\omega = 80 \pi \text{ rad/sec}$)



(a)



(b)

圖二十四 左固定端點反作用彎矩的穩態解及其FFT
 ($\mu = 100 \text{ sec}^{-1}$; $P_1 = P_2 = P_0 \sin \omega t$, $P_0 = 80 \text{ lb}$, $\omega = 80 \pi \text{ rad/sec}$)