

行政院國家科學委員會專題研究計畫進度和成果報告

ZK 型雙導程蝸輪組特性研究與敏感性分析(I) The characteristic and sensitivity analysis of ZK-type dual lead worm gear drives (I)

計畫編號：NSC 88-2212-E-009-018

執行期限：87年8月1日至88年7月31日

主持人：蔡忠杓 教授 國立交通大學機械系

一、中文摘要

本專題研究計畫為三年期之研究計畫，今年度為本研究計畫之第一年(87年8月至88年7月)，係依據ZK蝸桿蝸輪之實際滾製加工機構，來設計磨輪及雙導程滾刀之設計參數和加工條件，配合齒輪嚙合原理(Theory of Gear Meshing)及微分幾何的觀念，來推導雙導程蝸桿和蝸輪之齒面數學模式。雙導蝸桿蝸輪組為增加嚙合長度及瞬間接觸齒數(Instantaneous Contact Teeth)，一般均採用較小之齒面壓力角。對大模數或小壓力角的蝸桿滾刀，在其滾削蝸輪時，將很容易在蝸輪齒面產生過切線。今年度本計畫亦利用所建立之蝸輪齒面數學模式，進一步探討其齒面過切之情形，研究結果可提供吾人設計適當滾刀參數及探討加工時刀具之設定，以避免過切產生。

關鍵詞：ZK 蝸桿蝸輪，雙導程，齒輪嚙合原理，過切

Abstract

The proposed research project is a three-year project. In the first year, based on the manufacturing mechanism of worm and worm gear, the design and manufacturing parameters of the grinding wheel and dual-lead hob cutter are properly chosen. Applying the theory of gear meshing and differential geometry, the mathematical model of a dual-lead worm and worm gear has been developed. The worm gear set with a low

pressure angle can increase the gear meshing length and instantaneous contact teeth. However, when the hob cutter possesses a large axial module and/or a low pressure angle, the undercutting may be occurred on the worm gear tooth surfaces. By applying the worm gear mathematical model and theory of gearing, the undercutting line can be found and represented on the worm gear tooth surfaces. By properly choosing the design and manufacturing parameters, the undercutting phenomenon of a worm gear set can be avoided.

Keywords: ZK-type worm and worm gear, dual-lead, Theory of Gear Meshing, Undercutting

二、緣由與目的

蝸桿蝸輪組為精密之傳動元件，常用於減速機構中。一般而言，蝸桿係藉由車床切削或磨床磨削其蝸桿面，而蝸輪則利用與其配對的蝸桿型滾齒刀在齒輪加工機上滾製而成。在滾製過程中由於刀具製造不良、工具機製造誤差、熱變形考量以及潤滑需求，實際在設計蝸桿蝸輪組時，必需留有一定之背隙，以避免齒面嚙合時產生干涉並可增加潤滑效果。增加此一背隙雖然可滿足蝸桿蝸輪組在傳動上的實際需要，但也會因此導致蝸桿在反轉瞬間因具有背隙而碰撞，造成衝擊力(Impact Force)太大以及蝸輪定位不精準等問題，此為傳統蝸桿蝸輪組在設計、製造與應用上很難克服之問題。

目前國內機械工業正走向超精密加工發展，對於加工機之精度及承受負載之能力要求愈來愈嚴苛，不能再允許太大背隙之存在。本研究計畫乃針對上述之問題，設計一新型雙導程蝸桿蝸輪組，藉由左右兩齒面採用不同導程之齒形來改變其軸向齒距，以避免由於製造誤差和蝸輪磨損所形成太大的背隙而影響其傳動精度。對於齒輪和栓槽軸等加工機以及各種工具機必須準確分度(index)之場合，也可藉由使用雙導程蝸桿蝸輪組並調整雙導程蝸桿之軸向位置，可使得雙導程蝸桿蝸輪組在傳動時，其背隙能控制在可接受範圍之內，以增加加工之準確度，也可克服斷續切削力所引起扭轉振動的問題。同時雙導程蝸桿蝸輪組係利用雙導程齒輪其左右齒形不同，藉由調整其左右齒面之導程係數，便可獲得在相同條件下，比傳統蝸桿蝸輪組承受更大負荷之齒形。

由於國際上齒輪產業的競爭，對於相關的技術資料取得不易。至於雙導程蝸桿蝸輪組之研究，國外廠商亦可能基於技術機密而未公開相關研究，國外學者在這方面研究亦不多，在國內則剛在起步階段且廠商之製造技術亦均仰賴於國外。為提昇國內工具機製造的精密度，相信藉由此一研究計畫之推展，將可提高國內雙導程蝸桿蝸輪組之製造水準，有助於工具機製造業改善其分度品質及可靠度，藉此達到產業升級的目的。

三、研究方法與結果

本計畫第一年(87年8月至88年7月)，係利用實際切削加工機構，來設計磨輪和雙導程蝸桿滾刀參數和加工條件。由於雙導程蝸桿左右兩齒面係設計成不同導程，使得左右兩邊齒形分別有不同壓力角、導程角與節圓半徑，因此，需利用磨輪分兩次分別加工蝸桿之左右齒面，而左右兩齒面創成之刀具參數及加工條件，亦需分開來設計與探討。利用齒輪嚙合原理，模擬了磨床磨削之機構，並已分別創成雙導程蝸桿左右兩邊齒面並推導其齒面方程式。運用此蝸桿齒面之數學模式為基準，吾人加

以修改而獲得增徑蝸桿型滾刀(Oversize Worm-Type Hob Cutter)的數學模式，並依據滾齒機之加工機構，也模擬創成雙導程蝸輪齒面之數學模式。由研究結果顯示，使用大模數和小壓力角之滾刀，比較容易在蝸輪齒面上產生過切線。由微分幾何之觀點可知，當蝸輪齒面上的切平面不存在時，亦即為蝸輪齒面上產生奇異點之位置，依此吾人已建立了蝸輪齒面的過切線。本研究計畫原規劃第一年之工作項目如下：

- (一)完成磨輪及滾刀參數設計及其幾何數學模式之建立。
- (二)建立ZK型雙導程蝸桿及蝸輪齒面之數學模式。
- (三)完成ZK型蝸桿及蝸輪齒面之分析與電腦軟體。
- (四)完成ZK型蝸輪齒面過切線之分析與電腦軟體。

至目前為止，本研究計畫第一年已完成了上述(一)至(三)項之工作項目，第(四)項則可望於七月份結案前如期完成。茲簡述本研究計畫已初步完成和獲得之結果如下：

磨輪左刀面的設計參數如圖1所示，右刀面同理可得。幾何數學模式包含磨輪刀面的軌跡方程式及法向量方程式，磨輪左刀面係用以磨削創成蝸桿之右齒面，其創成機構之示意圖如圖2所示。經推導左刀面表示於 S_1 座標系之軌跡方程式如下：

$$R_{1r} = \begin{bmatrix} B_{1r} \sin \varphi + C_{1r} \cos \varphi \\ B_{1r} \cos \varphi - C_{1r} \sin \varphi \\ D_{1r} - p_r \varphi \end{bmatrix}$$

其中，

$$B_{1r} = (b_l - u \sin \gamma_l) \sin S_r + u \cos \gamma_l \cos S_r \sin \alpha$$

$$C_{1r} = u \cos \gamma_l \cos \alpha + (r_{gl} + r_{wr} + A_1)$$

$$D_{1r} = u \cos \gamma_l \sin S_r \sin \alpha + (u \sin \gamma_l - b_l) \cos S_r - A_0$$

磨輪左刀面的法向量方程式及被創成蝸桿之右刀面的相關幾何數學模式也同理推導求得，由於篇幅所限，不予詳列。

雙導程蝸桿之右齒面數學模式可由磨輪之左刀具面軌跡方程式及磨輪左刀具面和

蝸桿右齒面之嚙合方程式聯立而成，此嚙合方程式經推導求得如下：

$$u = b_p \sin r_l - \sin r_l \tan_s \left(\frac{r_{gl} + r_{wr} + A_1}{\tan S_r} + p_r \right) - (r_{gl} + r_{wr} + A_1) \frac{\cos r_l}{\cos_s} + p_r \frac{\cos r_l}{\cos_s \tan S_r}$$

同理，雙導程蝸桿之左齒面數學模式，可由磨輪右刀具面之軌跡方程式及磨輪右刀具面和蝸桿左齒面之嚙合方程式聯立而得，在此亦不予詳列。

一般蝸輪是以蝸桿型滾齒刀在滾齒機上滾削而成，理論上，對偶創成蝸桿蝸輪組，創成蝸輪用的滾齒刀之外型即為與蝸輪相嚙合的蝸桿外型相同。因此，前面所推導的雙導程蝸桿數學模式，即可視為用以滾削雙導程蝸輪之滾刀數學模式。然而，實務上蝸桿蝸輪組是依據非對偶創成法製造之，因此，創成蝸輪之蝸桿型滾刀實際上是使用增徑蝸桿型滾刀，而增徑蝸桿型滾刀之外形與前述蝸桿外形相似，只是節圓直徑稍微加大些。同雙導程蝸桿之齒面數學模式推導原理，ZK型雙導程蝸輪之右齒面的數學模式，可由增徑蝸桿型滾齒刀之左刀具面的軌跡方程式及滾齒刀左刀具面和蝸輪右齒面之嚙合方程式聯立而得。ZK型雙導程蝸輪之左齒面的數學模式，可由增徑蝸桿型滾齒刀之右刀具面的軌跡方程式及滾齒刀右刀具面和蝸輪左齒面之嚙合方程式聯立而得。以上所述之各方程式均已在本年度計畫中推導求得。

前面已推導ZK型雙導程蝸桿及蝸輪之齒面形狀為聯立方程式之解，如利用數值解方法可求得其齒面之解析解，然後應用電腦繪圖的方法即可繪出其三維之齒形。圖3為ZK型雙導程蝸桿三維外形之電腦繪圖，圖4則為ZK型雙導程蝸輪之電腦繪圖。

依據齒輪嚙合原理，當刀具創成工件之過程，若其創成函數關係式滿足一對一關係時，則被創成之齒面即為一規則曲面(Regular Surface)。當齒面存在有非規則點或曲面時，則齒面強度會減低同時也會影響齒面之傳動精度。在過切分析時通常是

利用Wildhaber所提之觀念為依據，亦即當被創成齒面之滑動速度為零時，即在創成齒面上產生奇異點。茲舉前面圖3及圖4所述之同一例題，來說明如何計算蝸輪齒面奇異點之數值解。在該例中係以單頭蝸桿型滾刀來滾削標稱軸向模數為3mm，齒數為72齒的蝸輪，若配對嚙合之蝸桿蝸輪組其中心距為133mm，探討在不同之蝸輪滾刀壓力角 r 為10°、12°、14°、16°、18°和20°時，分別計算在z方向分量等於零時，蝸輪齒面上之過切點。由模擬分析之結果顯示，滾刀在壓力角為18°和20°時，所創成之蝸輪齒面無過切點產生。滾刀在壓力角為16°時所創成之蝸輪，其過切點發生在z=0mm之截面其半徑為103.82mm處。當滾刀壓力角分別為14°、12°和10°時，蝸輪齒面過切點分別發生在半徑為104.67mm、105.94mm和106.36mm處。圖5顯示滾刀壓力角 $r=18^\circ$ 時，蝸輪齒面之過切線。

四、討論及成果自評

利用齒輪嚙合原理並使用磨輪配合磨床機構來創成ZK型蝸桿與增徑蝸桿型滾刀，可以獲得精度較高之ZK型蝸桿齒面與增徑之蝸桿型滾刀刀具面。ZK型蝸輪則是以增徑之蝸桿型滾刀依據滾刀創成蝸輪之滾削機構創成而成。由於所使用之蝸桿型滾刀精度高，所以可以獲得精度較高之ZK型蝸輪齒面。本年度研究之ZK型蝸桿與蝸輪齒面數學模式，係依據前述創成原理，在不考慮加工誤差及熱變形等理想狀況下所推導之齒面模式，因此蝸桿與蝸輪齒面數學模式可供三次元量測儀做為比較實際切製之齒面變異的標準齒面。雙導程蝸桿由於左右齒面具有不同的軸向模數，因此雙導程蝸桿在其軸向截面上有不同的齒厚，藉著調整蝸桿型滾刀在創成蝸輪時之軸向位置，即可獲得不同齒厚的蝸輪，也可藉由調整與蝸輪嚙合之蝸桿的軸向位置，即可改變嚙合之蝸桿蝸輪組的嚙合背隙，使得ZK型雙導程蝸桿蝸輪組可適用於承受反覆旋轉且具有荷重的工作台

等之傳動元件。

由研究結果顯示，雙導程蝸桿蝸輪組藉由設計較小之壓力角，可增加嚙合蝸桿蝸輪組之作用線長度及接觸比，同時也可增加其瞬時接觸齒數。不過蝸輪在較小之壓力角和較大之模數時，則容易在齒面上產生過切線。由於蝸輪齒面為三度空間複雜曲面，有多個齒面創成參數會影響到蝸輪齒面之過切線，而過切線一般不易由數值解求得，同時，蝸桿蝸輪組屬於滑動接觸，更不易以圖解法來求取過切線。本年度之研究則以二維之方式來簡化蝸輪過切線之求解，亦即沿著蝸輪轉軸方向探討每一蝸輪截面是否有奇異點存在。在被創成之蝸輪截面上若有過切點存在時，在數學上即表示該截面存在退化點。當齒面上某一點不存在切平面時，即表示在被創成之齒輪齒面的過切點，利用這個方法即可很容易求得被創成齒面之過切線。利用本年度計畫所建立的ZK型雙導程蝸桿和蝸輪齒面方程式及其齒面單位法向量，可提供往後第二、三年將進行的蝸輪齒面變異量分析、敏感性分析、非嚙合區分析和齒輪接觸分析的運動誤差、瞬時接觸齒數、平均接觸比等更深一層問題的研究之依據，也可做為蝸桿與蝸輪的齒面應力分析及齒面最佳齒印形成之分析依據。

五、參考文獻

- [1] Bosch M., Economical Production of High Precision Gear Worms and Other Thread Shaped Profiles by Means of CNC-Controlled Worm and Thread Grinding Machines, pp. 3-19. Klingelnberg Publication, Germany, 1988.
- [2] Colbourne, J. R., "The Use of Oversize Hobs to Cut Worm Gears," American Gear Manufactures Association, Technical Paper, 1989.
- [3] Colbourne, J. R., "Undercutting in Worms and Worm-Gears," American Gear Manufactures Association, Technical Paper, 1993.
- [4] Fang, H. S. and Tsay, C. B., "Mathematical Model and Bearing Contacts of the ZK-Type Worm Gear Set Cut by Oversize Hob Cutters," Journal of Mechanism and Machine Theory, Vol. 31, No. 3, pp. 271-282, 1996.
- [5] Fang, H. S. and Tsay, C. B., "Effects of the Hob Cutter Regrinding and Setting on ZE-Type Worm Gear Manufacture," International Journal of Machine Tools & Manufacture, Vol. 36, No. 10, pp. 1123-1135, 1996.
- [6] Fong, Z. H. and Tsay, C. B., "The Undercutting of Circular-Cut Spiral Bevel Gears," ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 114, pp. 317-325, 1992.
- [7] Janninck, W. L., "Contact Surface Topology of Worm Gear Teeth," Gear Technology, pp. 31-47, 1988.
- [8] Kim, V., "Limitations of Worm and Worm Gear surfaces in Order to Avoid Undercutting," Gear Technology, pp. 30-35, 1990.
- [9] Litvin, F. L., Theory of Gearing, NASA Reference publication RP-1212, Washington D.C., 1989.
- [10] Litvin, F. L., Gear Geometry and Applied Theory, Prentice Hall, New Jersey, 1994.
- [11] Niemann, G. and Heyer, E., "Investigations of Worm Gear," VDI 95, pp. 141-157, 1953.
- [12] Simon, V., "Computer Aided Manufacture of High Precision Hob," International Journal of machine Tools & Manufacture, Vol. 28, No. 4, pp. 443-452, 1988.
- [13] Simon, V., "Hob for Worm Gear Manufacturing with Circular Profile," International Journal of Machine Tools & Manufacture, Vol. 33, No. 4, pp. 615-625, 1993.
- [14] Simon, V., "A New Worm Gear Drive with Ground Double Arc Profile," Journal of Mechanism and Machine

Theory, Vol. 29, No. 3, pp. 407-414, 1994.

[15] Winter, H. and Wilkesmann, H., "Calculation of Cylindrical Worm Gear Drives of Different Tooth Profiles," Journal of Mechanical Design, Vol. 103, pp. 73-82, 1981.

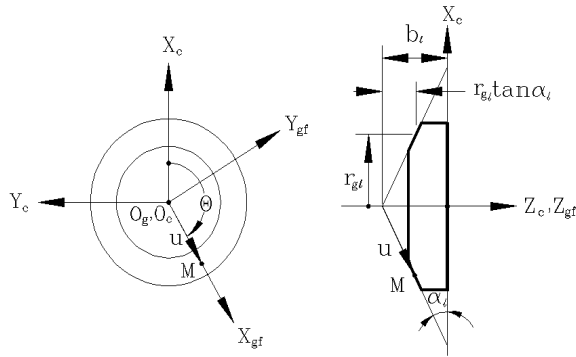


圖 1. 磨輪左刀面設計參數示意圖

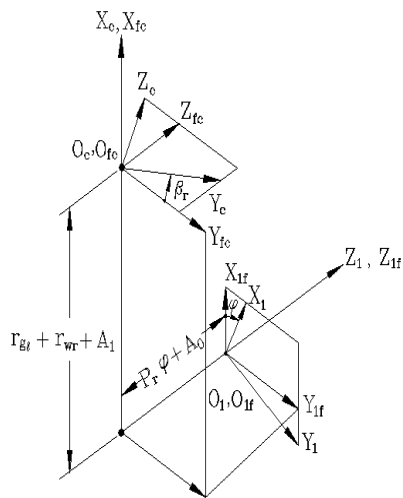


圖 2. 磨輪左刀面磨削蝸桿右齒面機構示意圖

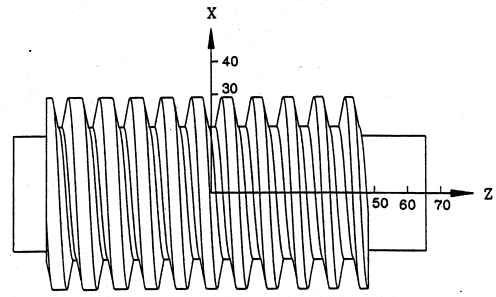


圖 3. ZK 型雙導程蝸桿

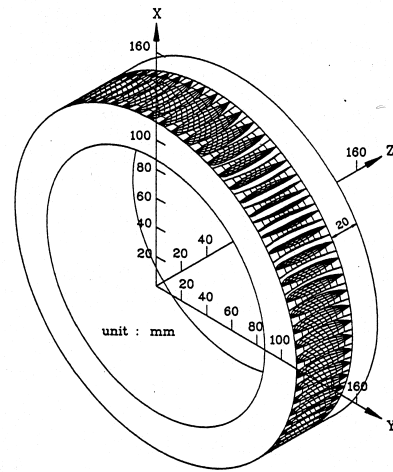


圖 4. ZK 型雙導程蝸輪

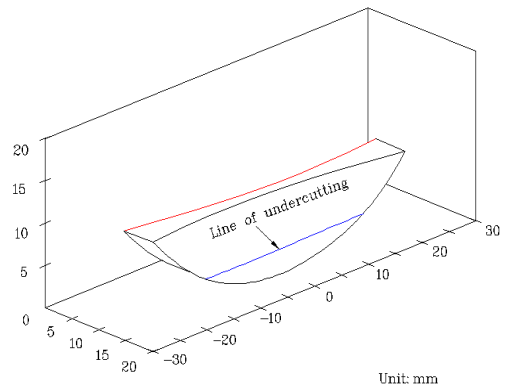


圖 5. 蝸輪之軸向模數為 3mm，壓力角為 18°時之齒面過切線