型態斜率轉換在影像重建上之應用

計劃編號　：NSC 87-2213-E-009-007

執行期限　：86 年 8 月 1 日起 至 87 年 7 月 31 日止

主持人　　：薛元澤(交通大學資訊科學研究所教授)

共同主持人：

中文摘要

這個專題計劃主要包括兩項研究子題，分別是:（１）形態切線擴張運算在二維影像上之應用，（2）應用斜率轉換之可逆性於影像之重建。

在形態切線擴張運算應用於二維影像上，由於形態切線擴張運算類似傳統數學形態學運算及在某些條件下它可函蓋傳統形態學的擴張運算，因此我們以函數(拋物線或直線)一步步的模擬影像上三個連續的點，再對此函數(拋物線或直線)做形態切線擴張運算，得到其相對應的值。

在應用形態斜率轉換於影像上之重建，由於形態斜率轉換具有可逆性，將兩個函數做形態切線擴張運算後再做形態斜率轉換，其得到的結果相當於各別對兩個函數做形態斜率轉換後的結果相加，因此我們可求藉逆的形態斜率轉換而得到重建的函數。在報告當中，我們首先探討幾個簡單的例子，並加以說明，最後則是實際應用於二維影像之重建的實驗結果。

英文摘要

Slope transform is often applied to image processing in recent years. It takes a part in nonlinear signal processing similar to Fourier transform in the linear signal processing. The thesis proposes a method to image restoration using Slope transform. We first give mathematics model and some examples to state the proposed method and problems. Then, using known structuring element to restore a dilated image. Finally, using a test image and it's dilated image to achieve structuring element. After this, any distorted image by a same dilation-like distortion can be restored.

二、計劃緣由與目的

在形態學上，形態切線擴張運算與傳統數學形態學擴張運算相類似，在某些條件下，像是函數為凸函數或凹函數，形態切線擴張運算的結果可以函蓋傳統數學形態學擴張運算子的結果。但其最重要的優點是，經由形態斜率轉換的作用可使其具有可逆性；而傳統形態學擴張運算就沒有此性質。也因為傳統形態學擴張運算不具可逆性，使其喪失很多應用，如影像的重建或回復等等..。目前形態切線擴張運算它的應用僅限於在訊號處理上，本計劃便是希望它也能和傳統形態學擴張運算蓬勃廣範的被應用在影像處理上。形態學轉換，形態斜率轉換之於形態學的重要性，如同傅立葉轉換在訊號處理及影像處理上的重要。這兩者之間有頗多相似的地方，譬如：兩個函數或訊號做完形態切線擴張運算的結果，再對它作斜率轉換，其結果是與各別對函數或訊號作形態斜率轉換再相加的結果是相同的。而兩個函數或訊號做完旋積運算的結果，再對它作傅立葉轉換，其結果是與各別對函數或訊號作傅立

葉轉換再相乘的結果是相同的，諸如此類相似的性質等等..。由於它有著與傅立葉轉換相似的好性質，因此我們對它的這些性質在影像處理上的應用與分析深感興趣。

目的：

結合形態切線擴張運算與傳統數學形態學擴張運算的相似性，擴大數學形態學運算在影像處理上的應用。

解決傳統形態學運算在影像處理上的不可逆性。

三、實驗方法及結果

3.1 主要流程為：(考慮一個簡單的想法：拋物線即為滿足限制的函數)

a1. 從影像中逐步選取三個連續的點。

a2. 判斷這三點是否共線：若是則用 $f(x)=ax+b$ 模擬這三點。

若不是則用拋物線 $f(x)=r_1+r_2x\ \ +r_3x^2$ 模擬這三點。

假設有三連續點分別 $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2),\ C(x_3,y_3),\ y_i$ 可視為 x_i 對應到函數的 值。$r_i,\ r_2,\ r_3$ 可由下列式子得到：

$$\begin{bmatrix} M & \sum x_k & \sum x_k^2 \\ \sum x_k & \sum x_k^2 & \sum x_k^3 \\ \sum x_k^2 & \sum x_k^3 & \sum x_k^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum f(x_k) \\ \sum x_k f(x_k) \\ \sum x_k^2 f(x_k) \end{bmatrix}$$

則經由選取另一凸或凹函數 g 當做結構元素，便可對函數 $f(x)$ 做形態切線擴張運算，我們用 $f\overset{\vee}{\oplus}g$ 表示。

a3. 最後所有的 $f\overset{\vee}{\oplus}g(x)$ 即為我們所期望的結果。

3.2 反切線斜率轉換部份

在這部份我們主要則是用離散型的反切線斜率公式，如下面的式子去求得：

給一些序列點 (x_i,y_i)，$i\in[0,n]$，離散的切線斜率轉換公式為：

$$\dot{x}(i)\rightarrow x_i-x_{i-1}\ ,\ \ i\in[1,n]$$

$$(x_i,y_i)\overset{S}{\leftrightarrow}\left(\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}},\frac{x_iy_{i-1}-x_{i-1}y_i}{x_i-x_{i-1}}\right)\equiv(X_i,Y_i)$$

而反過來的公式為：

$$\left(-\frac{\dot{Y}}{\dot{X}}(t),\frac{\dot{X}Y-X\dot{Y}}{\dot{X}}(t)\right)\ \xleftrightarrow{S}(X(t),Y(t)).$$

在上面的兩個式子中 (x_i,y_i) 是指原來的切線擴張的對應域中的點，而 (X_i,Y_i) 為其切線斜率的對應域的對應點.

四、結論及討論

本報告主要結合切線斜率轉換及型態切線擴張，對於影像上重建問題提供一解決方式，圖一、圖二、圖三、分別呈現原始與重建完的結果) 此外幾個不同情況簡單的例子也仔細清處的描述在表一和表二)

五、參考資料

[1] Matheron, G., Random Sets and Integral Geometry, John Wily, New York, 1975.

[2] J. Serra, ed., Image Analysis and Mathematical Morphology, Academic Press, New York, 1982.

[3] Serra, J., editor, Image Analysis and Mathematical Morphology, Academic Press, 1983.

[4] Leo Dorst, Rein Van den Boomgarrd, Morphological signal processing and the slope transform, Signal Processing 38 (1994) 79-98.

[5] Petros Maragos, Morphological system:

Slope transforms and max-min difference and differential equations, Signal Processing 38 (1994) 57-77.
[6] Petros Maragos, Differential Morphology and Image Processing, IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 5 No.6. June 1996, 922-937.
[7] Henk J. A. M. Heijmans, petros Maragos, Lattice calculus of the morphological slope transform, Signal Processing 59 (1997) 17-42.
[8] Petros Maragos, Slope transform: Theory and application to nonlinear signal processing, IEEE Transactions on Signal Processing, 43 (1995) 864-877.
[9] R. Van Den Boomgaard, L. Dorst, S. Makram-Ebeid, and J. Schavemaker, Quadratic structuring functions in Mathematical Morphology, Mathematical Morphology and its applications to Image and Signal Processing, edited by P. Maragos R. W. Schafer, and M.K Butt, Kluwer Academic Publishers (1996) 147-154.
[10] P. Maragos, Morphological Systems Theory: Slope Transform, Max-Min Differential Equqations, Envelope Filters, and Sampling, in Mathematical Morphology and Its Applications to Image Processing, Eds. J. Serra and P.Soille, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, The Netherlands, 1994, 149-160.
[11] L.Dorst and R.Van Den Boomgaard, Two Dual Representations of Morphology Based on the Parallel Normal Transport Property, in Mathematical Morphology and Its Applications to Image Processing, Eds. J. Serra and P.Soille, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, The Netherlands, 1994, 161-170.
[12] L.Dost and R. Van Den Boomgaard, "An analytical theory of mathematical morphology", Mathematical Morphology and its Applications to Signal Processing, Barcelona, 1993, pp. 245-250.

 

(a) Original image of Lena (b) Original image of Bridge

(—·—) Figure 4.1 The original image.

 

(a) Dilated image for $r = 0.5$ (b) Restored Image for $r = 0.5$ SNR=37.52

 

(c) Dilated image for $r = 1.0$ (e) Restored image for $r = 1.0$ SNR=34.54

(—·—) Figure 4.2 Experimental results of Lena for $r = 0.5$, 1.0.

(a) image for $r = 0.5$

(b) Restored image for $r = 0.5$
SNR=35.61

(d) Dilated image for $r = 1.0$

(e) Restored image for $r = 1.0$
SNR=32.88

(一一) Figure 4.3 Experimental results of Bridge for $r = 0.5$, 1.0.

簡例一：令 A(1,84), B(2,40), C(3,115), 表示三個連續的影像點，而結構元素為 $g_r(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ， r 是圓的半徑.

(a) 當 $r = 0.5$ 時

Original pixels		(1,84)	(2,40)	(3,115)	
Dilated pixels		(1,152)	(2,64)	(3,198)	
Add two points	(0,240)	(1,152)	(2,64)	(3,198)	(4,332)
Slop transform pair of dilated pixels: (X_i, Y_i)		(-88,240.0)	(-88,240.0)	(134,-204)	(134,-204)
$(X_i, Y_i) - (w, F[g](w))$		(-88,196.0)	(-88,196.0)	(134,-271)	(134,-271)
Restored pixels		107	10	130	

表一.

(b) 當 $r = 1.0$ 時

Original pixels		(1,84)	(2,40)	(3,115)	
Dilated pixels		(1,248)	(2,116)	(3,225)	
Add two points	(0,380)	(1,248)	(2,116)	(3,225)	(4,394)
Slop transform pair of dilated pixels: (X_i, Y_i)		(-132,380.0)	(-132,380.0)	(139,-162.0)	(139,-162.0)
$(X_i, Y_i) - (w, F[g](w))$		(-132,248.0)	(-132,248.0)	(139,-301.0)	(139,-301.0)
Restored pixels		115	0	115	

表二.