

平行計算於地下水序率最佳規劃模式之應用(I)

計畫編號: NSC 87-2211-E-009-040

執行期間: 86年8月1日至87年7月31日

主持人: 張良正(國立交通大學土木工程系副教授)

摘要

由於地下水之流動速度緩慢，若得不到與抽水相適應的充分補充，從而導致儲量減少，並帶來各種危害。因此本研究探討如何適當的使用地下水，及最佳的管理策略，期望能對地下水之管理整治提出可行之決策方針，改善地下水使用不當所造成之災害。本研究主要目標是發展地下水之水質與水量之規劃模式。本年度首先將拘限含水層之水流與水質控制方程式以葛勒金有限元素法及隱式後向有限差分法轉換成代數方程式，使其成為定率最佳控制演算法之系統轉換函數，並以簡化模式驗證定率最佳演算法之可行性。另外對於平行序率最佳控制演算法，本研究整合定率最佳演算法、分離理論與平行演算技巧所發展之一種高效率之序率優選演算法，此法已完成了理論推導之部份，隨後將應用於地下水之模式中。

Abstract

As generally known, the flow of groundwater is rather slow. In addition, a seriously low level of the water table for a local area may incur many environmental hazards, as further exacerbated by groundwater pumping which leads to an inadequate amount of water and lack of a timely recharge to compensate for this deficiency. Therefore, this study thoroughly describes management practices of groundwater resources and presents a stochastic optimal management model for groundwater resources management and contaminant remediation. In the first year of this project, the governing equations of a confined aquifer

was solved by the Galerkin's finite element method and implicit backward finite difference scheme. The numerical solution, which is a matrix equation, serves as a transfer function in the deterministic optimal management model. The management model was applied to a simplified system to demonstrate its reliability and capacity. In addition, the theoretical development for the parallel stochastic optimal control theory was performed as well. The parallel optimal control algorithm integrates the deterministic optimal control theory, separation theorem and model decomposition scheme. In the second year, the parallel algorithm will be implemented and applied to a groundwater system.

一、計畫緣由與目的

台灣地區由於水資源有限加上近年來國內之經濟快速發展，因此水資源之需求日漸殷切，而可供開發水庫之地區已趨於飽和，地下水資源亦被大量的開發利用，所以如何適當的開發水資源已成為一項新的問題。對於地下水之開發使用，過去由於對整體地下水資源狀況的了解不足，以及管理未能落實，因而引起台灣西部沿海的地層下陷、海水倒灌及部份地區的海水入侵與諸如桃園 RCA 場址、中石化公司安順場址污染事件等災害。因此如何利用天然之補助量，以推估地下水之抽水量，並配合地表水來源做適當之分配使用與若有災害發生時如何防治，應是刻不容緩的事。

由於地下水之管理營運非常適合以動態規劃來處理，而以動態規劃來處理此問題時，控制變數及狀態變數之維度就非常多且複雜，因此地

下水之管理營運可視為一種大尺度(large-scale)長決策範圍(long decision horizon)之問題。而此種問題若能針對其問題的特性，將整個解題演算法做適當的分解和組合，使平行演算的技巧能運用在此問題中，則將可大大的減少所需的計算時間，故本研究乃針對此問題，提出多層結構之平行序率最佳演算法，期望使地下水之管理營運更具效率。

二、研究方法

地下水模式：

地下水拘限含水層之水量與水質控制方程式可表示如下：

(1) 系統轉換函數：

水流控制方程式：

$$L_h(\bar{h}) \equiv \nabla \cdot (bK\nabla\bar{h}) + f_a + \sum_{i \in Q} \bar{q}_i \delta(x_i, y_i) - bS_s \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

水質控制方程式：

$$L_c(\bar{c}) \equiv \nabla \cdot (\theta b \tilde{D} \cdot \nabla \bar{c}) - b v \cdot \nabla \bar{c} - f_a(\bar{c} - c_f) - \sum_{i \in Q} \bar{q}_i (\bar{c} - c) \delta(x_i, y_i) - bR \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

邊界條件：

水流：

$$\alpha_h \nabla \bar{h}_n = \beta_h (\bar{h} - h_b) + \gamma_h |_{(x,y)} \in \Gamma \quad (3)$$

水質

$$\alpha_c \nabla \bar{c}_n = \beta_c (\bar{c} - c_b) + \gamma_c |_{(x,y)} \in \Gamma \quad (4)$$

(3) 初始條件：

水流：

$$\bar{h} = h_0(x, y) \quad (5)$$

水質

$$\bar{c} = c_0(x, y) \quad (6)$$

(1)-(6)式以葛勒金有限元素法及隱式後向有限差分法[8,9]轉換成

$$([A] + [B] / \Delta t) \{h_{t+1}\} = \frac{[B]}{\Delta t} \{h_t\} - \{F_h\} + [P_h] \{q_{t+1}\} \quad (7)$$

$$([N](\bar{D}(\bar{v}_{t+1}), \bar{v}_{t+1})] + [M] / \Delta t) \{c_{t+1}\} = \frac{[M]}{\Delta t} \{c_t\} - \{F_c\} + \sum_{i=1}^m q_{t+1,i} [P_c] \{c_{t+1} - c\} \quad (8)$$

(7)、(8)式即為本研究所採用之系統轉換函數。

序率最佳控制理論：

本研究主要以定率型之限制型可微分動態規劃[1,2,6]為核心，對於序率目標函數之處理，是將原序率目標函數對狀態變數之期望值作泰勒展開，然後在取期望值之方式來近似原序率目標函數之期望值，由於本研究所考慮之目標函數，對狀態變數而言最高為二次，因此以泰勒展開在取期望值[7]之方式可獲得原序率目標函數期望值之完全形式。

而對於最佳控制變數之決定，本研究採用分離理論。即最佳控制變數值為狀態變數之估測值乘上增益矩陣，而增益矩陣與統計量無關，因此本序率優選模式在每一個疊帶過程皆處理原目標函數期望值之二次近似型態，並假設此疊帶過程會收斂於原問題之最佳值，如同 Geogakakos[7]之 ELQG 演算法。有關序率最佳優選演算法可參閱文獻[3,7]。

平行演算法[5,4]：

由於本研究所考慮之問題型態含有終端限制條件，因此若將原問題根據終端限制條件分解成若干個時間區間，而每一個時間區間可證明為相互獨立之子問題，則每一個子問題即可獨立運算。因此本研究將利用此特性，將問題分成兩層，上層為適當的將原問題切成若干個子問題，每個子問題之初始條件與終端條件為上層優選之標的，因此上層即變成參數最佳化問題，至於下層則仍然維持最佳控制問題。由於此種問題型態非常適合以平行演算技巧來縮短演算時間，故本研究進一步的發展平行演算方法。

三、範例演算

本範例演算採用簡化的地下水區來進行模式的驗證，旨在說明對於地下水污染整治之大型問題，本研究可得時變的抽水策略，此方法不同於非線性規劃所得之常態的抽水方式。本範例演算所考慮之問題區域如圖一所示，圖二為給定之初始條件。

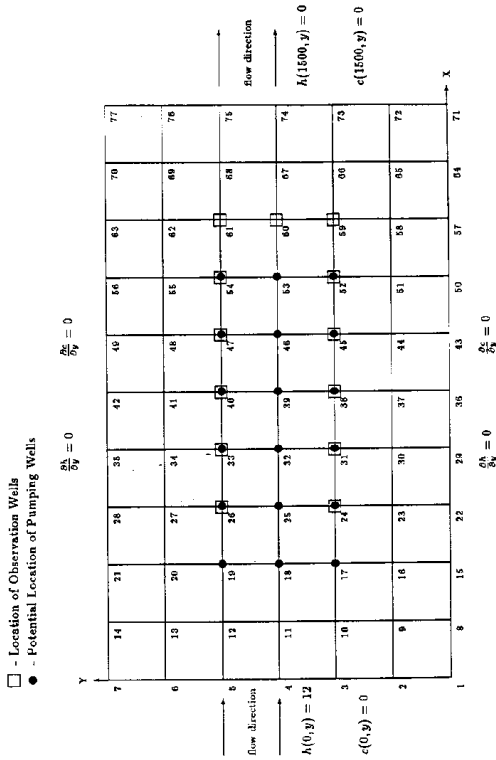
目標函數與限制條件如下

$$\min_U J(U) = \min_U \left(\sum_{i \in \Omega} a_1 u_{t,i} + \sum_{i \in \Omega} a_2 u_{t,i} (h_{z,i} - h_{t+1,i}) \right) \quad (9)$$

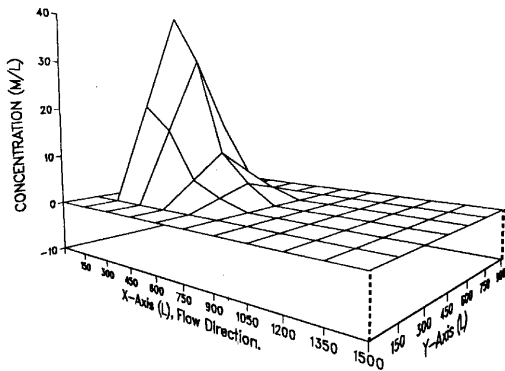
Subject to

$$\{x_{t+1}\} = (E(h_t, u_t))^{-1} (\{K\}\{x_t\} + \{P\}\{u_t\} + \{F\}) \quad (10)$$

$$f_t(x_t, u_t) = \begin{cases} c_{t,j} - c_{\max} \leq 0, \text{ when } t = N, j \in \Omega \\ u_t \leq 0, \text{ when } t = 1, \dots, N \\ \left| \sum_{i=1}^m u_t \right| - u_{\max} \leq 0, \text{ when } t = 1, \dots, N \end{cases} \quad (11)$$



圖一：範例之邊界條件與抽水井、觀測井位置



圖二：範例演算之初始條件

在範例演算中有 18 點可供選擇為抽水井之位置，亦有 13 口觀測井，其在空間上之分不情形如圖一所示。表一為範例演算所需之參數。圖三為範例演算之初始抽水策略。

表一：範例演算參數

參數名稱	參數值
水力傳導係數	0.00043 1m/sec
縱向 dispersivity, d_L	70 m
橫向 dispersivity, d_T	3 m
diffusion coefficient, d	0.0000001 m ² /sec
Specific storage, S_s	0.001
Retardation coefficient, \hat{R}	0.72
孔隙率, θ	0.2
含水層厚, b	10 m
水總體積	2.7×10^6 m ³
面積	900×1500 m ²
元素尺寸	150×150 m ²
總節點數, n_T	77
總元素數, n_e	66
總可抽水井位, m	18
觀測井數, ψ	13
水頭 Dirichlet 邊界點, $n_T - n_1$	14
濃度 Dirichlet 邊界點, $n_T - n_2$	14
總狀態變數數, $n(n_1 + n_2)$	126
時間步幅, Δt	2190 hr
總時間數, N	20
規劃年限, $N \cdot \Delta t$	5 year

四、結果分析

表二所示為優選結果，由表二可知目標函數值經由運算後可大為減少，圖四為優選後的最佳井位與抽水量，由圖四配合圖一、圖二可知最佳抽水位置為對稱於污染值之分佈。

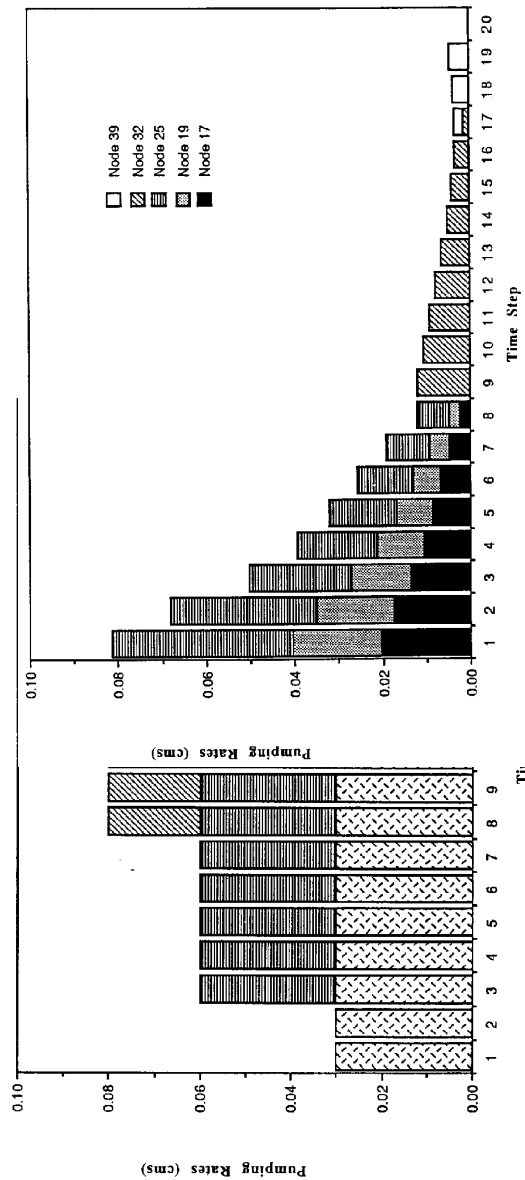
表二：優選結果

五、結論

由於污染值於地下水中之傳輸速度很慢，因此在整治的漫長時間中，採用本研究所提出之時變的抽水策略會比非時變的抽水策略來的有效率，然而時變的抽水策略其所需的計算量則比非時變的抽水策略大的多。因此本研究將於第二年度改進上述之優選演算法，使其能進一步的使用平行演算的方式改善計算時間，以及將地下水的的不確定性考慮進來。

參考文獻

1. 蕭金財、張良正、許鈺珍，「應用序率最佳控制於水庫系統之優選操作」，中國土木水利工程學刊，第9卷第3期，pp. 449-457 (1997)
2. 蕭金財、張良正，「多目標水庫序率最佳操作模式之建立與應用」，台灣水利，第46卷第1期，pp. 72-83 (1997)
3. 蕭金財，「序率最佳控制理論應用於水庫系統之優選操作」，碩士論文，交大土木研究所，1994
4. 許鈺珍，「平行演算於多水庫系統序率最佳操作之應用」，碩士論文，交大土木研究所，1994
5. Chang, S.C., "A Hierarchical, Temporal Decomposition Approach to Long Horizon Optimal Control Problems", Ph.D. Dissertation, Univ. of Connecticut, 1986.
6. Murray, D. M. and Yakowitz, S., "Constrained Differential Dynamic Programming and Its Application to Multireservoir Control", Water Resour. Res., 15(5), pp. 1017-1027, (1979)
7. Georgakakos, A. P., and D. H. Marks, "A New Method for the Real-Time Operation of Reservoir Systems," Water Resource Research, Vol.23, No.7, pp.1376-1390 (1987).
8. Chang, L. C., "Optimal Time-Varying Pumping Rate for Groundwater Remediation: Application of a Constrained Optimal Control Algorithm", Water Resour. Res., Vol.28, No.12, pp.3157-3173, (1992)
9. Chang, Liang-Cheng, "Application of Constrained Optimal Control Algorithms to Groundwater Remediation", Ph. D. Dissertation, Univ. of Cornell, (1990).



	N. P.	O. P.	P. R.
目標函數包含處罰函數 Z	112.6	42.35	62%
目標函數包含處罰函數 ($\sum_t g(x_t, u_t)$)	99.08	42.18	57%
處罰函數 ($\sum \sum y_{i,t}$)	13.52	0.17	98%
違反限制條件之總和 ($\sum \sum \max(0, f_i(x_t, u_t))$)	0.22	5.7×10^{-5}	100%

N. P.:Nominal Policy, O. P.:Optimal Policy, P. R.:Percentage Reduction

圖三：範例演算之初始抽水策略
圖四：優選後的最佳井位與抽水量