行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

交通車流波動方程式數值計算之研究
The Study of Numerical Computing of Continuum Traffic Flow Wave Equations

計畫編號：NSC 87-2211-E-009-015
執行期限：86 年 8 月 1 日至 87 年 7 月 31 日
主持人：卓訓榮　國立交通大學運工管系教授
E-mail：hjcho@cc.nctu.edu.tw

一、中文摘要

動態巨觀車流模式為一階偏微分方程之波動方程式。但偏微分方程式的求解不易，且不同的初始條件及邊界條件會導致不同的解出現。因此本研究嘗試以數值方法中的有限差分法與有限元素法進行數值分析，並比較兩種數值方法之優缺點，藉此討論兩種方法的適用性。
關鍵詞：車流理論、波動方程式、有限元素法、有限差分法。

Abstract

This article introduces the numerical methods of dynamic traffic flow models. We study and compare finite difference method and finite element method with initial conditions and boundary conditions. And we discuss advantages and disadvantages between the two methods in the study, too.
Keywords: traffic flow theory, wave equation, finite element method, finite difference method.

二、緣由與目的

台灣地狹人稠，道路數目與公路容量在短期內無法大幅擴充，面對不斷升高的車輛數目，已瀕臨當初道路規畫設計時的公路最大容量。許多解決方案諸如：工期較短且成本較低的運輸系統與相關的交通控制措施，例如：高速公路出入口匝道儀控、、彈性上下班時間。然而在進行決策判斷及相關管理與控制策略時需要有足夠的資訊來供相關人員分析與參考，因此具有動態、即時的交通車流資訊的掌握便成為一個重要的課題。基於提供最新車流資訊的觀點，本研究目的在於對動態車流模式發展高穩定與快速的數值模擬方法，用於開發能分析交通車流變化現象的模擬器，作為交通決策、管理、控制與工程上的輔助分析工具。

巨觀車流中的波動模式，即將車流行為視為一連續的流體，而利用流量守恆的特性與流量等於密度乘以速度（q=ku）的關係，而推導出動態車流模式。然而，動態車流模式在不同的初始條件及邊界條件就會導致不同的解行為出現，相關領域中，許多學者嘗試以數值方法中的有限差分法求解模式的近似解，在土木工程、流體或氣體動力學相關領域中也有許多學者運用有限元素法進行各種不同物理模式的數值計算與求解。相較於傳統的有限差分法，有限元素法主要的優點為其可以處理不規則道路邊界以及非線性的交通現象。本研究在於探討有限差分與有限元素法在車流模式模擬上的相關課題。研究的目的歸納如下：

1. 以有限差分法求解動態車流模式—以 Burgers’方程式為例。
2. 以有限元素法求解動態車流模式—以 Burgers’方程式為例。
3. 比較兩種數值方法在車流模式模擬上之優、缺點。

4.討論兩種方法在不同交通動態車流模式的適用性。

三、結果與討論

本研究針對一種動態車流模式，即 Burgers' 方程式探討有限元素法與有限差分法在模式模擬上與實際解之間的差異。Burgers' 方程式可表達非線性傳遞過程 $\left(u\dfrac{du}{dx}\right)$ 以及擴散過程 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{d^2u}{dx^2}\right)$ 之間的平衡關係，其可以描述車流傳遞以及擴散的行為，進而達到所要觀察的交通車流運動行為與現象。方程式 (1) 就是我們所探討的 Burgers'方程式。(1)式中的 Re 指的是擴散係數。

$$\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2u}{dx^2}=0 \qquad (1)$$

Burgers'方程式在某些初始條件以及邊界條件的情況下有正確的解析解。本研究探討之初始條件以及邊界條件如(2)所述：

$$\begin{cases} u_0(x)=u(x,0)= \begin{matrix} 1 & if\ -1\le x\le 0 \\ 0 & if\ 0<x\le 1 \end{matrix} \\ u(-1,t)=1 \qquad u(1,t)=0 \end{cases} \qquad (2)$$

在此假設條件之下， Burgers' 方程式的正確解為。

$$u_e=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\xi}{t}\exp\{-0.5\,\mathrm{Re}\,F\}d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-0.5\,\mathrm{Re}\,F\}d\xi} \qquad (3)$$

$$F(\xi;x,t)=\int_0^{\xi}u_0(\xi')d\xi'+\frac{0.5(x-\xi)^2}{t}$$

為了要比較正確解和估計解之間的差異，必須要限制時間項 t 的範圍以及最小擴散項的值，使邊界條件和正確解一致

(一) 有限差分法模擬車流模式的數值結果

有限差分法中 FTFS、FTBS、FTCS、Leapforg、Lax-Friedrichs、Lax-Wendroff、Beam-Warming 以及 Godunov 等方法，以 Lax-Friedrichs 演算法在不同初始條件以及邊界條件下有著較佳的一般性結果，而 Godunov 演算法在不連續條件問題的應用上，有更穩定與準確的解行為與結果。車流模式的問題屬於後者，因此，在比較有限差分法以及有限元素法數值模擬的優劣上面，採用 Godunov 演算法與有限元素法比較。

Godunov 演算法所求得的數值解與實際解的差異如圖 1，圖 1 為固定時間點，t= 0.92 之比較，其中紅線為實際解，藍線為數值解。

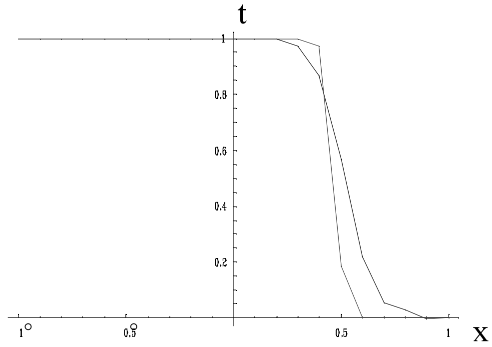

圖 1 有限差分法數值解與實際解的比較

考慮不同的格點切割數，比較結果發現，只增加時間軸的切割並沒有降低平均誤差以更接近實際解，甚至平均誤差還稍微的上昇。代表了在空間軸沒有跟著切割的情形下，只加切時間軸並不能使數值解更接近實際解。至於空間軸不加切的原因在於含擴散項有限差分演算法本身的限制。有限差分演算法受限於切網格差分近似的缺點，當擴散項很大的時候，空間軸相對的就要切得很大才能夠避免因不斷遞迴求解導致估計值沒有辦法收斂的情形，因此，本研究只討論當擴散係數為 0.01 的有限差分法數值模擬結果。

(二)有限元素法模擬車流模式的數值結果

有限元素法求解 Burgers' equation 時，採用柴比雪夫多項式（Chebyshev polynomials）做為估計解的近似方程。配合以 Galerkin method 解微分方程。選一固定時間點，t= 0.92 後，比較近似解與正確解。如圖 2。

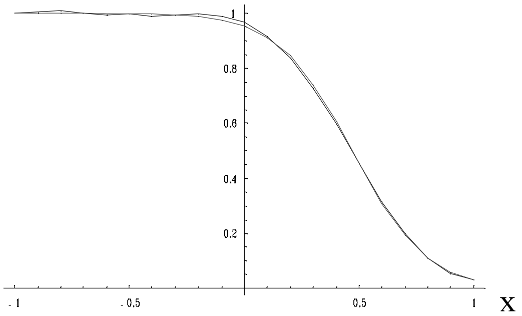

圖 2 有限元素法數值解與實際解比較圖

另比較不同擴散係數時，發現有限元素法在擴散係數較大的時候有著較佳的結果。在擴散係數為 0.1 的情形下（即 Re=10），數值解和實際解的差異非常小，平均誤差$\|u_a - u_e\|_{rms} = 0.0083$ 。但是在擴散係數為 0.01 的情況下（即 Re=100），數值解和實際解的差異就非常大，平均誤差$\|u_a - u_e\|_{rms} = 0.1049$。再對有限元素法進行擴散係數為 1.0 的分析，發現當擴散係數為 1.0 的時候（即 Re=1），數值解和實際解的差異更小，平均誤差為$\|u_a - u_e\|_{rms} = 0.0022$。當擴散係數很小的時候，有限元素法的數值求解並沒有辦法有效表現出衝擊的變化情形，且數值解會產生震盪的情形。比較兩種數值方法與實際解。

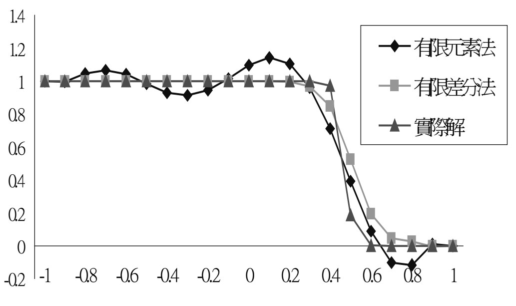

圖 3 有限元素法、差分法、實際解的比較

從圖 3 可以看出有限差分法較能夠捕捉到實際解的變動情形，相形之下，有限元素法則呈現跳動的現象。在平均誤差方面，有限元素法的平均誤差是$\|u_a - u_e\|_{rms} = 0.1049$，而有限差分法的平均誤差為$\|u_a - u_e\|_{rms} = 0.03659$，誤差也較有限元素法來得小。因此，在擴散項十分小的情形之下，有限差分法有著比有限元素法數值解來得較優秀的性質。值得注意的是，這是在擴散項十分小的情形下。在擴散項比較大的情形，例如擴散項為 0.1 時，有限元素法的優點則在此展現出來，平均誤差從$\|u_a - u_e\|_{rms} = 0.1049$ 降為$\|u_a - u_e\|_{rms} = 0.0083$，從圖 2 可以看出有限元素法所求得的數值解和實際解的差異非常小，算是十分優秀的方法。在擴散項更大的時候，有限元素數值解和實際解的差異更小，如擴展項為 1 時，平均誤差更只有$\|u_a - u_e\|_{rms} = 0.0022$。另外需考慮的是，本研究所探討的問題是具擴散項的 Burgers' equation。有限差分法在處理具擴散項的偏微分方程式時，除了要考慮原先的 CFL 收斂條件之外，還需要考慮擴散項在這個偏微分方程式的影響。如果擴散項影響超過非線性項（即 u_t+uu_x 中的 u）時，則經過不斷遞迴求解，可能會造成數值解不收斂的情形產生。

另外從運算時間方面來考慮，有限差法分因構造簡單不複雜，程式撰寫容易，因此所花費時間也十分短。一個 20×100 共 2000 格點的有限差分法求解只需要不到 1 秒就可以求出近似的數值解。有限元素法則涉及矩陣運算求解，程式撰寫雜複，因此花費的時間也較長。雖然所花時間比較長，約需要 1.5 秒可以求出近似的數值解。

從以上的分析，可以得到以下的研究結論：

1. 車流模式有限元素法程式撰寫不易，執行時間較長。
2. 有限差分法則撰寫程式容易，程式執行時間短，尤其顯形式的有限差分法，利用遞迴求解可在短時間之內就求得大略的數值解。
3. 有限差分法在處理具擴散項的車流模式時，要考慮擴散項對偏微分方程的影響。如果擴散項很大的話，可能會導致數值不收斂的情形產生。
4. 當忽略擴散項或擴散項非常小的時候，可以利用有限差分法進行求解。
5. 在處理具大擴散項車流模式時，有限元素法較有限差分法穩定，應運用有限元

素法進行模擬以得精確的解。

四、計畫成果自評

本研究比較有限元素法與有限差分法求解動態車流模式之優劣。一般在工程上之應用，認為有限元素法的表現優於有限差分法，本研究則探討不同條件下，兩種演算法的適用性，並發覺有限元素法不一定絕對優於有限差分法，需視問題的條件而定，雖然此結果與預期有些出入，但就數值方法的討論與相關課題之研究有很大的助益，尤其是發現有限差分法中之 Godunuv 方法當模式之擴散係數小時，表現優於有限差分法，因此非線性模式不一定要用程式撰寫不易的有限元素法進行計算。就研究內容而言，與計劃完全相符，且適於在交通運輸領域或數值計算領域發表。

五、參考文獻

[1] Beltrami, E. J., Mathematics for Dynamic Modeling, San Diego, Academic Press Inc., 1987.

[2] Brekhorskikh, L. M., and Goncharov, V., Mechanics of Continua And Wave Dynamics, New York, Springer-Verlag Inc., 1994.

[3] Daganzo, G. F., " *A Finite Difference Approximation of The Kinematics Wave Model of Traffic Flow* ", Transportation Research B, Vol.29B, No.4, pp.261-276, 1995.

[4] Daganzo, G. F., " *Requiem for Second-Order Fluid Approximations of Traffic Flow* ", Transportation Research B, Vol.29B, No.4, pp.277-286, 1995.

[5] Gerlough, D. L., and Huber, M. J., Traffic Flow Theory, Washington, D. L., Transportation Research Board National Research Council, 1975.

[6] Giordano, F. R., and Weir, M. D., Differential Equations A Modeling Approach, Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1991.

[7] Haberman, R., Mathematical Models-Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow, New Jersey, Prentice-Hall Inc., 1977.

[8] Hirsch, M. W., and Smale, S., Differential Equations, Dynamical Systems, And Linear Algebra, University of California, Berkeley,1970.

[9] Highway Capacity Manual, Washington D. L., Transportation Research Board National Research Council, 1994.

[10] Leutzbach, W., Introduction to the Theory of Traffic Flow, New York, Springer-Verlag Inc., 1988.

[11] Lighthill, M. J., and Whitham, G. B., " *On Kinematics Waves I. Flood Movement in Long Rivers* ", London, Proceedings Royal Society, A229, pp.281-316, 1955.

[12] Lighthill, M. J., and Whitham, G. B., " *On Kinematics Waves II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Road* ", London, Proceedings Royal Society, A229, pp.317-345, 1955.

[13] May, A. D., Traffic Flow Fundamentals, New Jersey, Prentice-Hall Inc., 1990.

[14] Newell, G. F., Theory of Highway Traffic Flow 1945-1965, Institute of Transportation Studies University of California, Berkeley.

[15] Newell, G. F., " *A Simplified Theory of Kinematics Waves in Highway Traffic, Part I：General Theory* ", Transportation Research B, Vol. 27B, No. 4, pp.281-287, 1993.

[16] Newell, G. F., " *A Simplified Theory of Kinematics Waves in Highway Traffic, Part II：Queueing at Freeway Bottlenecks* ", Transportation Research B, Vol. 27B, No. 4, pp.289-303, 1993.

[17] Newell, G. F., " *A Simplified Theory of Kinematics Waves in Highway Traffic, Part III：Multi-Destination Flows* ", Transportation Research B, Vol. 27B, No. 4, pp.305-313, 1993.

[18] Payne，H.J.，" Models of freeway traffic and control"，Math. Models Publ. Sys. Simul. Council Proc.，28，51-61.(1971).

[19] Smoller, J., Shock Waves And

Reaction-Diffusion Equation, New York, Springer-Verlag Inc., 1983.
[20] Whitham, G. B., Linear and Nonlinear Wave, New York, John Wiley and Sons Inc., 1974.