行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※
※　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　※
※　**以資料包絡法解多目標問題之參數敏感度分析(2/2)**　　※
※　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　※
※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

計畫類別：☑個別型計畫　　☐整合型計畫

計畫編號：NSC 90-2218-E-009-027-

執行期間：　90 年　8 月　1 日至　91 年　7 月　31 日

計畫主持人：劉復華　教授

共同主持人：

本成果報告包括以下應繳交之附件：

☐赴國外出差或研習心得報告一份

☐赴大陸地區出差或研習心得報告一份

☐出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份

☐國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：國立交通大學工業工程與管理學系

中　華　民　國 九十一 年　十 月 二十一日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

以資料包絡法解多目標問題之參數敏感度分析(2/2)

The sensitivity analysis on sloving binary integer programming with multiple objectives functions by Data Envelopment Analysis

計畫編號：NSC 90-2218-E-009-027-
執行期限：90 年 8 月 1 日至 91 年 7 月 31 日
主持人：劉復華　　國立交通大學工業工程與管理學系
計畫參與人員：賴慶祥 彭浩軒 等
國立交通大學工業工程與管理學系

摘要

我們常接觸到許多決策上的問題是多目標的。本研究為求解在多個候選方案中選取一個最佳的組合，此組合乃為若干個候選方案所複合而成。有若干個評量的指標，各候選方案在各指標的績效值為已知。各指標的性質可分為兩類：一為績效值高者表示優異，另一為績效值低者表示優異。執行各候選方案時對於各項資源的消耗量與各產出項的貢獻量為已知。但是各項資源消耗各有其上限、各項產出效益各有其上限須列入考慮。

其可模式化如下

Max　$c_{r1}w_1+c_{r2}w_2+\ldots+c_{rK}w_K$, $r=1,\ldots, s$.

Min　$d_{i1}\mathrm{w}_1+d_{i2}w_2+\ldots+d_{iK}w_K$, $i=1,\ldots, m$.

Subject to

$a_{t1}w_1+a_{t2}w_2+\ldots+ a_{tk}w_K \le l_t$,　$t=1,\ldots, g$.

$p_{e1}w_1+p_{e2}w_2+\ldots+ p_{ek}w_K \ge b_e$, $e=1,\ldots, h$.

$w_k\in \boldsymbol{B}=\{0, 1\}$,　$k=1,\ldots, K$.

其中 w_k 為第 k 個候選者是否被錄取的決策變數。有 s 個求極大化的績效評量目標式，以及 m 個求極小化績效評量目標式；每個目標式都是獨立考量的，亦即目標式之間是無任何權重的。共有 g 項資源限制，共有 h 項產出限制。

關鍵詞：多目標式；二元整數規劃；資料包絡分析

Abstract

This research is to solve models of binary integer programming with multiple objective functions such as:

Max　$c_{r1}w_1+c_{r2}w_2+\ldots+c_{rK}w_K$, $r=1,\ldots, s$.

Min　$d_{i1}\mathrm{w}_1+d_{i2}w_2+\ldots+d_{iK}w_K$, $i=1,\ldots, m$.

Subject to

$a_{t1}w_1+a_{t2}w_2+\ldots+ a_{tk}w_K \le l_t$,　$t=1,\ldots, g$.

$p_{e1}w_1+p_{e2}w_2+\ldots+ p_{ek}w_K \ge b_e$, $e=1,\ldots, h$.

$w_k\in \boldsymbol{B}=\{0, 1\}$,　$k=1,\ldots, K$.

There are K candidates under selection. If candidate-k is selected, w_k=1, otherwise w_k=0. Some of them might be selected. Candidate-k assesses c_{rk} and d_{ik} in the r-th to-be-maximize performance index and the i-th to-be-minimize performance index, respectively. Candidate-k assesses a_{tk} and p_{ek} in the t-th resource and the e-th target, respectively. We now restrict the available the t-th resource with its upper bound l_t and the e-th target with its lower bound b_e.

A two-phase procedure is developed. Phase one is to filter out all the feasible solutions that satisfy the resources and targets constraints by a special enumeration method. Allocation model of data envelopment analysis (DEA) is employed to select the best feasible solution. The best solution possesses zero opportunity cost on the performance indices.

Keywords: Data Envelopment Analysis, Multiple Objective Functions, Sensitivity Analysis, Project Selection.

一、問題簡述

我們常接觸到許多決策上的問題卻是多目標的。其可模式化如下(P1)之多目標式的二元整數線性規劃(Multiple Objectives

Binary Integer Linear Programming, MOBILP) 問題：

(P1)

其中決策者有 K 個候選方案可以選擇；w_k 為第 k 個候選者是否被錄取的決策變數，若其被錄取則 $w_k= 1$，否則 $w_k=0$。共有 g 項資源限制，在第 t 列限制式中之係數 a_{tk} 為第 k 個候選者需消耗第 t 項資源之數量，係數 l_t 為第 t 項資源之可用數量。共有 h 項產出限制。在第 e 列限制式中之係數 p_{ek} 為第 k 個候選者可產出第 e 項資源之數量，係數 b_e 為為決策者對於第 e 項產出的最低要求。目標式中之係數 c_{rk} 為第 k 個候選者之對於第 r 項求大指標貢獻的數量。目標式中之係數 d_{ik} 為第 k 個候選者之對於第 i 項求小指標貢獻的數量。此乃本研究所欲探討的主題。決策者有 s 個求極大化的目標式，以及 m 個求極小化的目標式；每個候選者對各目標式各有已知的貢獻量，每個目標式都是獨立考量的，亦即目標式之間是無任何權重的。

我們的目標是在眾多的候選者的錄取組合（以向量表示)中挑選出具有高效率的那些組合。同時將他們依照其高效程度做一排序，其中最高效者，可以是最佳選擇。

二、緣由與目的

本計畫上個年度完成兩項研究，[3]之問題為(P1)之特例，其中 s=1, m=1, g=0, h=0. 及僅有一求小及一求大之目標式，且無任何限制式。[4]之問題為(P1)之另一特例，即無任何限制式。我們以資料包絡法(Data Envelopment Analysis, DEA) 求解問題，問題之詳細敘述與相關之文獻回顧請參閱已完成兩個子題 [1,2,3,4]。本年度所完成者(P1)，難度十分高。

Cook[[7]以一個階段，DEA 模式加上二元變數所構成的限制式，求解混合型整數規劃(mixed-integer programming)問題來完成，因而容易產生計算上的複雜性增加以及誤差控制的問題。除此之外，此一新模式由於計算負擔上的問題會降低其模式變化上的彈性，而使得希望加入之限制條件個數能夠愈少愈好，相反的此一情形將使模式與實際問題的差距增加。

本研究其他相關之重要文獻列於文末。

三、結果與討論

我們是以限制條件篩選法以及 DEA 兩個階段分開處理此類問題，由於兩個階段分別可以獨立處理限制式的嚴謹性以及 DEA 模式的選擇，因此使得在求解組合績效的選擇上更加具有彈性與完整性。第一階段所得到之可行組合，在第二階段中，進行 DEA 的分析評比。在第二階段排序方面，採用全面模式 [9]，除了考慮一般技術低效所造成的機會成本外，同時也計入了配置低效所產生的機會成本，提供一個不同於傳統 DEA 評量的方法。由於我們使用兩階段的方式相較於使用在過去的 DEA 模式上，並不會由於大量新增的限制條件個數而提高我們評比高效組合的難度。

Phase-One

第一階段即是以窮舉法逐一淘汰全部 2^K 個可能的組合中未能達到下列(g+h)個限制式的組合，來篩選出『可行組合』。在第 j 個組合中，$\mathbf{w_j}$，第 k 個候選者若被錄取則 $w_{kj}= 1$，否則 $w_{kj}=0$。$\mathbf{w_j}=(w_{1j}, w_{2j},\ldots, w_{Kj})$，$j=1,\ldots,2^K$.

$$a_{t1}w_{1j}+a_{t2}w_{2j}+\ldots+a_{tk}w_{Kj} \le l_t, \quad t=1,\ldots, g.$$
$$p_{e1}w_{1j}+p_{e2}w_{2j}+\ldots+p_{ek}w_{Kj} \ge b_e, \; e=1,\ldots, h.$$

如 $\mathbf{w_j}$，滿足限制條件則計算下列數據

$$Y_{rj}=c_{r1}w_{1j}+c_{r2}w_{2j}+\ldots+c_{rK}w_{Kj},\; r=1,\ldots, s.$$
$$X_{ij}=d_{i1}w_{1j}+d_{i2}w_{2j}+\ldots+d_{iK}w_{Kj},\; i=1,\ldots, m.$$

假設 f(P)代表可行組合所形成的集合，每個分子稱之為 DMU(decision making unit)。第一階段結束時 f(P)的分子數量應隨著 K 值的增加而成指數增加的情況。

為提高計算速度，我們於新加入 f(P)的分子總數每達到一閥界值時，先以 DEA-BCC 模型進行篩選低效率的 DMU。閥界值的大小將影響求解本計畫所訴求問題的解題時間。建議以 500 為度。

為求提高計算速度，$\mathbf{w_j}$ 的篩選次序需比照[4]所敘述之步驟。

Phase-Two

由於以往在 DEA 的模式如 CCR、BCC、ADD 以及 SBM，往往只考慮到技術效率(technical efficiency)層面，將 DMU 分為高效與低效兩群，難能再高效者之間加以排序，不能做出最後決策。同時，在面對 f(P)中大量的 DMU 下，需客觀的資訊才能作最後的決策。因此，我們以考慮資源

分配效率的觀點，重新對可行組合作 DEA 的評比分析。

Cooper 等人[9]提出全面模式(P2)，在每一個指標的價格(p)或成本(c)已知的情況，由模式(P2)的目標式推演出(P3)，等號右側第一項為所有 DMU 總和之最大利益，第二項為選擇 DMUo 所能獲取的利益。等號左邊亦是(P2)的目標式，代表著選擇 DMUo 的利益損失，即為『機會成本』。

因此，在同時考慮技術無效率(technical inefficiency)以及配置無效率(allocation inefficiency)所造成的浪費下，以各 DMUo 所求得的機會成本的高低來排序各 DMU 的優劣。機會成本為零的 DMU，即被評量為最佳的 DMU。當組合 *o* (object 的縮寫)，$o \in f(P)$ 的相對績效 Θ_o 時，其 DEA-CCR 模式為

(P2)

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \Sigma_{(r=1\sim s)} p_r s_r^{+} + \Sigma_{(i=1\sim m)} c_i s_i^{-} \\
&subject\ to \\
&\quad Y_{ro} = \Sigma_{(j \in f(P))} Y_{rj} \lambda_j - s_r^{+},\ for\ r=1\sim s; \\
&\quad X_{io} = \Sigma_{(j \in f(P))} X_{ij} \lambda_j + s_i^{-},\ for\ i=1\sim m, \\
&\quad -\alpha_{ro} \le s_r^{+} \le \beta_{ro},\ r=1\sim s \\
&\quad -\gamma_{io} \le s_i^{-} \le \delta_{io},\ i=1\sim m \\
&\quad \Sigma_{(j \in f(P))} \lambda_j = 1, \\
&\quad \alpha_{ro}, \beta_{ro} \ge 0,\ r=1\sim s \\
&\quad \gamma_{io}, \delta_{io} \ge 0,\ i=1\sim m \\
&\quad \lambda_j \ge 0\ for\ j \in f(P),\ s_i^{-}, s_r^{+} : free.
\end{aligned}
$$

(P3)

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_{(r=1\sim s)} p_r s_r^{+} + \Sigma_{(i=1\sim m)} c_i s_i^{-} \\
&= (\Sigma_{(r=1\sim s)} p_r Y_r - \Sigma_{(i=1\sim m)} c_i X_i) \\
&\qquad -(\Sigma_{(r=1\sim s)} p_r Y_{ro} - \Sigma_{(i=1\sim m)} c_i X_{io})
\end{aligned}
$$

其中

$$Y_r = \Sigma_{(j \in f(P))} Y_{rj} \lambda_j \quad and \quad X_i = \Sigma_{(j \in f(P))} X_{ij} \lambda_j$$

其中 p_r 為第 r 項求大指標的單位價格，c_i 為第 i 項求小指標的單位成本，α_{ro}、β_{ro}、γ_{io}、δ_{io} 為 DMUo，每一項指標鈍變數（s_r^{+}，s_i^{-}）的範圍。

本研究以下模型(P4)去計算 f(P)中每個 DMUo 的機會成本(OC)。

(P4)

$$
\begin{aligned}
&Max\ OC = \Sigma_{(r=1\sim s)} (1/Y_{ro}) s_r^{+} + \Sigma_{(i=1\sim m)} (1/X_{io}) s_i^{-} \\
&subject\ to \\
&\quad Y_{ro} = \Sigma_{(j \in f(P))} Y_{rj} \lambda_j - s_r^{+},\ for\ r=1\sim s; \\
&\quad X_{io} = \Sigma_{(j \in f(P))} X_{ij} \lambda_j + s_i^{-},\ for\ i=1\sim m, \\
&\quad s_r^{L} \times Y_{ro} \le s_r^{+} \le s_r^{U} \times Y_{ro},\ r=1\sim s \\
&\quad s_i^{L} \times X_{ro} \le s_i^{-} \le s_i^{U} \times X_{ro},\ i=1\sim m \\
&\quad \Sigma_{(j \in f(P))} \lambda_j = 1, \\
&\quad \lambda_j \ge 0\ for\ j \in f(P),\ s_i^{-}, s_r^{+} : free.
\end{aligned}
$$

其中 s_r^{L}，s_r^{U}，s_i^{L}，s_i^{U}，為已知之參數例如分別為 0, 0.3, 0, 0.25。若求不得 DMUo 的 OC 值時，表示所設定的上下限過緊或是此 DMUo 不可能為決策者所選擇。

OC 值最小的 DMU 所代表的組合即為最佳的選擇。

具有限制式之多目標式的模型如(P1)，欲對於其中任何一個參數進行其敏感度分析仍需進一步研析。

以 DEA 全面模式 (overall model) (P4)進行可行組合之間的互評，可得一相對機會成本為零之最佳組合。此最佳組合在達到技術高效的同時，亦達到配置高效。此一方法與本研究上一年度所完成之結果[1,2,3,4]相較更具實務上之意義。

四、計畫成果自評

本研究之成果能夠成功求解問題，計算所需時間隨著 K 值之增加呈指數增加。我們以 K=37 的例題，在 2200Hz 速度的個人電腦上，需 12 小時。我們以 CPLEX 套裝軟體作為解(P4)及 DEA-BCC 模型等線性規劃問題的子程式。我們以 C++為程式語言建立求解 Phase-One 之步驟，並遞迴地進行 CPLEX 的子程式求解 Phase-Two。

結果將由國際學術期刊載，尚待各界公評。

五、參考文獻

[1] Fuh-Hwa Liu & Ching-Hsiang Lai, 2000, “Using DEA for Multi-objective Binary Integer Programming Without Constraint,” Proceedings of the 5th annual International Conference on Industrial Engineering-Theory, Applications and Practice, ID 351, December 13-15, Hsinchu, Taiwan.

[2] Fuh-Hwa Liu & Ching-Hsiang Lai, 2000, “Efficient Robustness of Multi-objective Binary Integer Programming Under DEA,” Proceedings of the 5th annual International Conference on Industrial Engineering-Theory, Applications and Practice, ID 352, December 13-15, Hsinchu, Taiwan.

[3] Liu, F.H. and Lai, C.H. (2001). “An Efficient Algorithm for Solving Unconstrained Two-Objective Binary Integer Linear Program,” Journal of the Operational Research Society,

(submitted)
[4] Liu, F.H. and Lai, C.H. (2001). "A Procedure for Solving the Unconstrained Multiple Objective Binary Integer Linear Programming Problem," Management Science, (submitted).
[5] Andersen, P. and Petersen, N.C. (1993). "A Procedure for *ranking* efficient units in Data Envelopment Analysis," *Management Science* 39 (10), 1261-1264.
[6] Charnes, A., Cooper, W.W., and Rhodes, E. (1978). "Measuring the efficiency of decision making *units*," *European Journal of Operational Research* 2, 429-444.
[7] Cook, W.D., and Green, R.H. (2000). "Project *prioritization*: a resource- constrained data envelopment analysis approach," *Socio-Economic Planning Sciences* 34, 85-99.
[8] Cooper, W.W., Seiford, L. M., and Tone, K. (2000). *Data Envelopment Analysis, A Comprehensive Text with Models, Applications, and DEA-Solver Software*, Kluwer Academic Publishers, London.
[9] Cooper, W.W., Park, K. S., and Pastor, J. T. (1999). "RAM：A *Range* Adjusted Measure of Inefficiency for Use with Additive Models, and Relations to Other Models and Measures in DEA," *Journal of Productivity Analysis, 11, 5-42*.
[10] Liu, F.H., Huang C.C., and Yen, Y.L. (2000). "*Using* DEA to obtain efficient solutions for multi-objective 0-1 linear programs," *European Journal of Operations Research* 126, 51-68.
[11] Oral, M., Kettani, O., Lang, P. (1991). "A Methodology for collective evaluation and selection *of* industrial R&D projects," *Management Science* 37 (7), 871-883.
[12] Tone, K. (1997). "A Slacks-based Measure of Efficiency in Data Envelopment Analysis," *European Journal of Operational Research* 143, 32-41.
[13] Zhu, J. (2001). "Super-efficiency and DEA sensitivity analysis," *European Journal of Operations Research* 129, 443-455.