

發展一利用非結構性網格之可壓縮/不可壓縮黏性流計算方法(II)

A Method Development for Compressible/Incompressible Viscous flow Using Unstructured Grids (II)

計劃編號：NSC 92-2212-E-009-012

執行期限：92 年 8 月 1 日至 93 年 7 月 31 日

主持人：崔燕勇 國立交通大學機械系教授

一、中文摘要（關鍵詞：非結構性網格， 可壓縮黏性流，壓力修正法）

本研究引用預測不可壓縮流之 SIMPLE 壓力修正法，以有限容積積分法、重置變數之無結構性網格，來離散穩態的統御方程式，求解可壓縮流。將密度及速度的變動導入壓力修正方程式中，推導出馬赫數控制因子，來自動調整壓力修正方程式在次音速為橢圓型式及在超音速為雙曲線型式之流場特性，可有效處理次、穿及超音速流場之問題，具有計算模擬全速流流場之能力。

英文摘要：(Keywords：unstructured grids, compressible flow, pressure correction method)

In this study the compressible flow is dealt with the use of unstructured grids and solved by a pressure correction manner as in the SIMPLE. By taking the variances in density and velocity into the pressure-correction equation a Mach number-controlled factor can be used to adjust the hyperbolic character immersed in the supersonic flows. In this way, all speeds, including the subsonic, transonic, and supersonic flows, can be handled equally effectively.

二、計劃緣由與目的

發展用於求解可壓縮流場的數值計算模擬方法大致可分為兩類：密度基底法及壓力基底法，前者常用於解高馬赫速流場；後者常用於解低馬赫速流場。密度基底法傳統上都使用非穩態形式之 Navier-Stokes 或 Euler 方程式，使用密度作為主要變數，其壓力則藉由狀態方程式來求得，通常應用在解高速、可壓縮流場；壓力修正法是將由動量方程式導出的壓力與速度關係式代

入連續方程式中，推導得到壓力修正方程式而解出壓力場，其密度則藉由狀態方程式來求得，因為在高速之可壓縮流或低速之不可壓縮流場中，壓力均扮演著相當重要的角色，故發展求解全速流解子之計算方法均以壓力為基底。

流場網格產生的種類大致可分為兩類：結構性與無結構性網格，結構性網格具有優先的方向及自動指標等方便引用的特性；可是遇到比較複雜的幾何外形時，則會遭遇許多限制及困難；近年來，無結構性網格技巧已被成功地應用在處理複雜幾何外形的流場計算，由於其能用任意形狀的多邊形來產生複雜幾何外形之網格，而且可以很容易地作局部加密，故其較結構性網格具有更大的彈性。

本文主要的目的為發展一套，以有限容積積分法、應用重置變數之非結構性網格，引用可預測複雜幾何外形不可壓縮流的 SIMPLE 壓力修正方法，加以延伸至可壓縮流，期能獲得具準確、穩定及收斂性良好之全速流流場之預測方法與計算程式。

三、研究方法

輸送方程式

有限容積傳輸方程式可簡單表示如下：

$$\int_S (r\vec{V}f - \Gamma_f \nabla f) d\vec{S} = \int_{\Omega} q_f d\Omega \quad (1)$$

對某一面 $\vec{e}$ 對流項的計算採用下列的混合差分計算：

$$F_e^c = F_e^{UDS} + a(F_e^{CDS} + F_e^{UDS}) \quad (2)$$

此處上標 UDS 代表上風差分法，另一上標 CDS 代表一高階差分法， a 乃是一介於 0 與 1 之間的數值。

擴散通量可由下式近似之：

$$F_e^d = \frac{\Gamma_e S^2}{\vec{d}_{PE} \cdot \vec{S}} (f_E - f_P) + \Gamma_e \nabla f_e \cdot (\vec{S} - \vec{d}) \quad (3)$$

此處 $\vec{S}$ 係格面向量， $\vec{d}_{PE}$ 是格點 P 至 E 之距離向量， $\vec{d}$ 是一沿 $\vec{d}_{PE}$ 方向之向量。

壓力、密度及速度偶合關係式

根據 SIMPLE 算則，將前次疊代的壓力 P^* 代入式動量方程式中，可解出速度場 V^* ，此時之速度與壓力場以及當時的密度所求出之質量通率，未必滿足連續方程式，即存在一質量殘值，因此質量流率必須作修正，使其滿足連續方程式之需求。

對可壓縮流而言，質量流率之修正則包含速度與密度之修正量，說明如下：

$$\dot{m}_f^{**} = [(r^* + r')(\vec{V}^* + \vec{V}') \cdot \vec{S}]_f = \dot{m}_f^* + \dot{m}_f' \quad (5)$$

$$\dot{m}_f' \approx (r^* \vec{V}' + r' \vec{V}^*) \cdot \vec{S}_f \quad (6)$$

將動量方程式之壓力項由源項中提出，可寫成下式：

$$\vec{V}_p = \vec{H}_p - \left(\frac{\Delta \Omega}{A_p} \right)_p \nabla P_p \quad (7)$$

控體面上的速度由動量線性內插方法來處理：

$$\vec{V}_f = \vec{V}_f + \left(\frac{\Delta \Omega}{A_p} \right)_f \nabla P_f - \left(\frac{\Delta \Omega}{A_p} \right)_f \nabla P_f \quad (8)$$

其中劃頂線之項目表示其為由控容體心格點 P 及周圍相鄰網格體心格點 C 之內插值。

所以質量流率可表為：

$$\dot{m}_f = r_f \vec{V}_f \cdot \vec{S}_f - r_f \left(\frac{\Delta \Omega}{A_p} \right)_f (\nabla P_f \cdot \vec{S}_f - \nabla P_f \cdot \vec{S}_f) \quad (9)$$

根據 SIMPLE 算則之技巧，其速度修正量與壓力修正量之關係如下：

$$\vec{V}_p' = - \left(\frac{\Delta \Omega}{A_p} \right)_p \nabla P_p' \quad (10)$$

面上的速度修正量為：

$$\vec{V}_f' = - \left(\frac{\Delta \Omega}{A_p} \right)_f \nabla P_f' \quad (11)$$

採用 Demirdzic 等人對可壓縮流密度修正量 ρ' 的處理方式如下，假設等熵流場：

$$r' \equiv \left(\frac{\partial r}{\partial p} \right) p' \quad (12)$$

其中 $\frac{\partial r}{\partial p} = \frac{1}{gRT} = \frac{1}{c^2} = C_r$

γ 表示定壓比熱與定容比熱之比 ($\gamma = C_p / C_v$)； c 表示音速。

一般對於面上密度之計算均採用一階上風差分法來近似，雖較穩定但其對震波之解析較模

糊，為了得到較佳之震波解析度，本文採用 Demirdzic 等人[1]之面上密度近似法，使用中央差分與上風差分之混合式，處理模式表示如下：

$$r_f^* = r_f^{*UDS} + a_r (r_f^{*CDS} - r_f^{*UDS}) \quad (13)$$

$$r_f' = (C_r p')_f \quad (14)$$

$$= (C_r p')_f^{UDS} + a_r [(C_r p')_f^{CDS} - (C_r p')_f^{UDS}]$$

其中 α_p 為密度之混合因子，其值介於 0 到 1 之間

將式(11)(13)及(14)代入(6)式中，可得：

$$\dot{m}_f' = -r_f^* \left(\frac{\Delta \Omega}{A_p} \right)_f \nabla P_f' \cdot \vec{S}_f + \frac{m_f^*}{r_f^*} (C_r p')_f \quad (15)$$

上式是本文之重要關係式，可以得到很重要的關係，說明如下：

(i) 首先我們來看該式右邊第一項為控體任一面兩邊壓力修正量之差的貢獻，故可視為擬似擴散項；而第二項為該面上本身壓力修正量的貢獻，故可視為擬似對流項。就不可壓縮流而言，質量流率的修正量僅為速度修正量的函數，換言之即是壓力修正量梯度的函數，所以只會出現擬似擴散項；就可壓縮流而言，質量流率的修正量則為速度與密度修正量的函數，所以會多出擬似對流項。

(ii) 如果我們將該式右邊第二項係數正常化，使 p'_f 之權重因子化為 1；則第一項的權重因子將會正比於 $(c/V)^2 = M^2$ (M 為馬赫數)，此權重因子本文稱之為馬赫數控制因子。當在次音速流動時，則此項因子明顯的大於 1，所以第一項佔優，而忽略第二項。反之若在可壓縮流時具有高的馬赫數，則第一項將遠小於 1，所以第二項將佔優。

(iii) 由於壓力修正方程式在次音速流場時，其行為為橢圓型式，而在超音速流場時則為雙曲線型式，本文之方法由馬赫數控制因子來自動調整流場特性，可以解決穿、超音速流場及震波附近高梯度變化之計算問題，故可以滿足全速流場之模擬計算需求。

令修正後之速度場滿足連續方程式可推得所要的壓力修正方程式。

四、結果與討論

(1). 漸縮-漸擴噴嘴

噴嘴之幾何外形如圖 1 所示，由圖 2 及圖 3 之準一維及二維流場之計算結果顯示，不管低速或高速均與解析解相當吻合，並對震波強度及位置之捕捉均有不錯的結果。證明本文之方法可執行低速與高速全速流場之計算。

(2). 二維溝槽中下壁面圓弧突出物流場之測試

用溝槽中圓弧突出物之內流場來測試程式對次音速、穿音速、超音速三種不同型式之非黏

性流場，此測試流場之幾何外形如圖 4 所示。

i. 次音速及穿音速內流場之計算

入口馬赫數 $M_{in}=0.5$ ，以四邊形無結構性網格進行測試，網格疏密度由 32×8 CV 到 256×64 CV，計算結果沿上下壁面之馬赫數分佈如圖 5 所示；圖 6 為其壁面之馬赫數分佈與 Parameswaran 等人[2]用 TVD 法計算結果之比較，結果非常接近。而圖 7 為 256×64 CV 網格計算所得之馬赫數等值圖，其值由 0.295 到 0.675，間隔為 0.015。

對於入口馬赫數 $M_{in}=0.675$ 之結果顯示於圖 8 及圖 9，可看出發展之程式能正確的捕捉震波之位置，震波前的最大馬赫數及圓弧前後處之值，由結果顯示在震波之前最大馬赫數約為 1.40，與前人[1][2]所得之結果相當，其壁面之馬赫數分佈亦非常接近。而圖 10 為 256×64 CV 網格計算所得之馬赫數等值圖，其值由 0.36 到 1.40，間隔為 0.04。

ii. 超音速內流場之計算

此處分別執行 $M_{in}=1.65$ 與 $M_{in}=1.4$ ($t/c=4\%$) 及 $M_{in}=1.6$ ($t/c=10\%$) 三種狀況之計算。

ii.a 狀況一之計算結果與討論：

以四邊形非結構性網格進行 $M=1.65$ $t/c=4\%$ 各種疏密網格計算。圖 11 為各種疏密網格沿上下壁面之馬赫數分佈，由圖可不論粗疏或細密網格均能捕捉到正確的位置，而網格疏密僅會影響震波的解析度、最大馬赫數及圓弧前後處之值。圖 12 為其上下壁面之馬赫數分佈與 Eidelman 等人[3]用二階 Godunov 法計算結果之比較如所示，計算結果非常接近。

ii.b 狀況二之計算結果與討論：

進行 $M=1.4$ $t/c=4\%$ 之計算，圖 13 為其壁面之馬赫數分佈與 Moukalled 等人[4]用 SMART 法計算結果之比較，由圖可看出在下壁面之圓弧前與後震波之位置有較大的差異，其餘均與前人所得之結果相當接近。圖 14 為馬赫數等值圖，可清楚看出震波正規反射及接近下壁面處震波交互作用等複雜之現象。

ii.c 狀況三之計算結果與討論：

進行 $M=1.6$ 及 $t/c=10\%$ 之計算，圖 15 為沿上下壁面之馬赫數分佈，與 Issa 等人[5]所作之計算結果除了在上壁面馬赫反射波之位置有較大差異外，餘均非常接近。圖 16 為馬赫數等值圖，由圖可清楚看出圓弧突出物前緣震波有偏移現象，而形成弓形斜震波，而此震波於上壁面反射時又形成三叉狀之弧形馬赫反射波，與理論分析結果吻合。

五、參考文獻

I. Demirdzic, Z. Lilek and M. Preic, 'A Collocated

Finite Volume Method for Predicting Flows at All Speeds', Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol. 16, 1029-1050 (1993).

[1] S. Parameswaran and I. Kiris, 'A Steady Shock-Capturing Pressure-Based Computational Procedure for inviscid Two-Dimensional Transonic Flows', Numer. Heat Transfer, Part B, Vol. 23, 221-236 (1993).

[2] S. Eidelman, P. Colella, and R. P. Shreeve, "Application of the Godunov Method and its Second-Order Extension to Cascade Flow Modeling", AIAA J., Vol. 22, NO. 11, 1609-1615 (1984).

[3] F. Moukalled and M. Darwish, 'A High-Resolution Pressure-Based Algorithm for Fluid Flow at All Speeds', J. Comput. Phys., 168, 101-133 (2001).

[4] R. I. Issa and M. H. Javareshkian, "Pressure-Based Compressible Calculation Method Utilizing Total Variation Diminishing Schemes", AIAA J., Vol. 36, No. 9, 1652-1657 (1998).

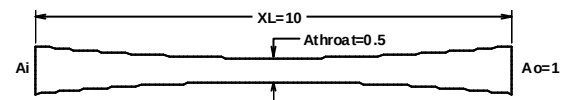


圖 1：漸縮-漸擴噴嘴之幾何外形示意圖

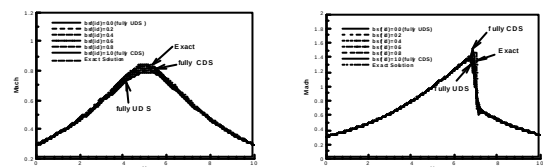


圖 2(a) (b)： $P_b=0.940$ 及 0.870 密度混合因子測試之馬赫數分佈圖

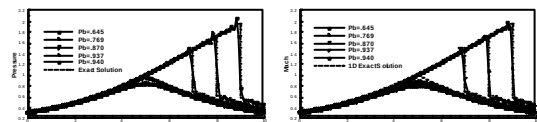


圖 3(a) (b)：一維及二維漸縮-漸擴噴嘴之馬赫數分佈圖

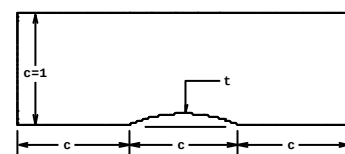


圖 4：二維溝槽下壁面圓弧外突物之外形圖

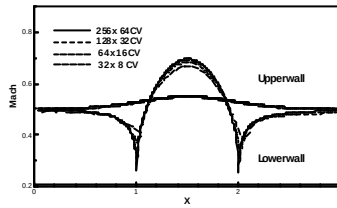


圖 5：次音速不同疏密網格之壁面馬赫數分佈圖

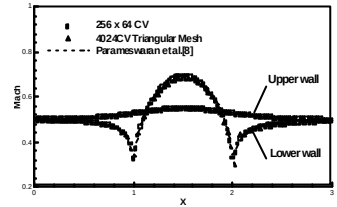


圖 6：次音速流場壁面馬赫數分佈圖

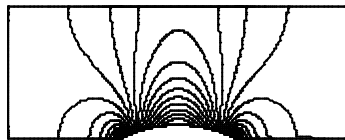


圖 7：次音速流場馬赫數等值圖

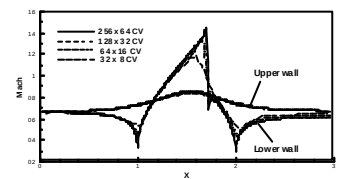


圖 8：穿音速不同疏密網格之壁面馬赫數分佈圖

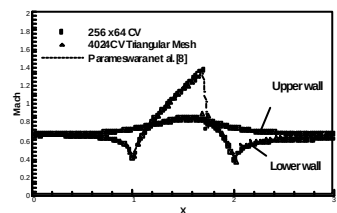


圖 9：穿音速流場壁面馬赫數分佈圖

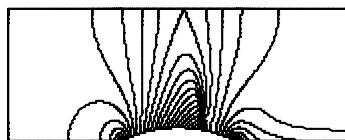


圖 10：穿音速流場馬赫數等值圖

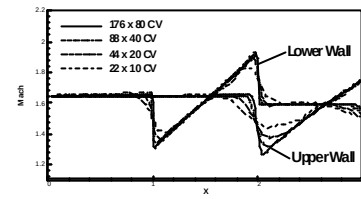


圖 11：超音速流場 $M_{in}=1.65$ 不同疏密網格之壁面馬赫數分佈圖

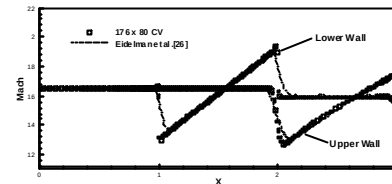


圖 12：超音速流場 $M_{in}=1.65$ 之壁面馬赫數分佈圖

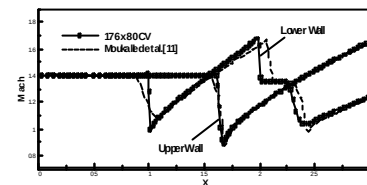


圖 13：超音速流場 $M_{in}=1.4$ 之壁面馬赫數分佈圖



圖 14：超音速流場 $M_{in}=1.4$ 之馬赫數等值圖

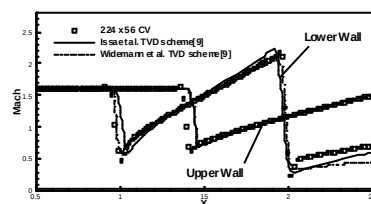


圖 15：超音速流場 $M_{in}=1.6$ 之壁面馬赫數分佈圖



圖 16：超音速流場 $M_{in}=1.6$ 之馬赫數等值圖