推薦《一個數學家的嘆息》

作者：洪萬生

作者簡介：洪萬生為臺灣師大數學系退休教授，為臺灣「HPM」發起人，強調數學史在數學教學中之功用。洪更是臺灣數學科普的推手，與學生翻譯多本科普書，廣撰科普書評，目前更推動以文學小說來促進數學之普及化。

經濟新潮社（2013）出版

本書應該是我所見過的數學教育宣言中最基進的（radical）一篇了。作者拉克哈特（Paul Lockhart）是一位成功的專業數學家，公元 2000 年，他毅然轉入紐約市一所小學任教，身體力行他認為有意義的數學教學活動。本書即是他的現身說法，因此，他對於美國目前中小學數學教育的現實之沈重但真誠的嘆息，似乎沒有幾個有識之士敢視而不見。

事實上，本書（分上、下兩篇）所呈現的願景，乃是中小學數學教育的一種烏托邦。通常我們面對烏托邦，似乎總是看看就好，大可不必認真。然而，我仔細閱讀（英文原文與中譯文）之後，對於總編輯林博華的邀序，多少有些猶豫與掙扎。

對照我自己的數學經驗，我將如何推薦本書呢？我自己曾在臺灣師大數學系任教將近四十年，主要授課如數學史都與訓練未來與現職中學教師有關，而且也曾訓練過幾十位在職教師班的碩士生，所以，我對於數學教育現實的興革，當然也有相當清晰的理想與願景。不過，經歷過那麼多的數學教育改革爭議之後，我覺得務實的訓練與提升教師的數學素養，恐怕是最值得把握的一條可行進路。

話說回來，作者的願景所引伸出來的策略，也並非完全不可行！譬如說吧，在本書結束時，作者語重心長的鼓勵老師「需要在數學實在（mathematical reality）中悠遊。你的教學應該是從你自己在叢林中的體驗很自然的湧出，而不是出自那些在緊閉窗戶車廂中的假遊客觀點。」因此，「丟掉那些愚蠢的課程大綱和教科書吧！」因為「如果你沒有興趣探索你自己個人的想像宇宙，沒有興趣去發現和嘗試了解你的發現，那麼你幹嘛稱自己為數學教師？」

對許多數學教師來說，要是丟掉課程大綱與教科書，大概會有一起丟掉洗澡水與嬰兒的制式（conventional）焦慮感，儘管有一些教師平常教學時，根本不太理會課程大綱與教科書內容，而只是使用自己或同仁共同編輯的講義。然而，不管你是否贊同拉克哈特的主張，也不管他的主張是否能夠付諸實現，本書是老師、家長與學生都不容錯過的金玉良言，值得我們咀嚼再三。底下，我要稍加說明我高度推薦本書的幾個理由。

本書上篇主題是「悲歌」，依序為〈數學與文化〉、〈學校裡的數學〉、〈數學課程〉、〈中學幾何：邪惡的工具〉以及〈標準數學課程〉等四節。下篇主題是「鼓舞」，但不分節論述。

上篇文字曾由史丹福大學的德福林（Keith Devlin）安排，在他自己為美國數學協會線上網站（*MAA Online*）開闢的每月專欄「德福林觀點」全文披露（2008 年 3 月），獲得遠遠超乎預期的迴響。

在上篇一開始，作者拉克哈特利用虛構的音樂與繪畫之學習夢境，來說明相關語言或工具的過度強調，讓這些藝術課程之學習，變成了愚蠢又無趣，以致於最終摧毀了孩子們對於創作模式與生俱來的好奇心。或許上述夢魘並非真實，但是，「類比」到數學教育現場，卻是千真萬確。而拉克哈特的立論，是一般人容易忽略的數學知識活動特性：數學是一門藝術！至於它「和其他類型的藝術如音樂和繪畫的差別只在於，我們的文化不認同數學一門藝術。」拉克哈特更進一步指出：

事實上，沒有什麼像數學那樣夢幻及詩意，那樣基進、具破壞力和帶有奇幻色彩。我們覺得天文學或物理學很震撼人心，在這一點上，數學完全一樣（在天文學發現黑洞之前，數學家老早就有黑洞的構想了），而且數學比詩、美術、或音樂容許更多的表現自由，後者高度依賴這個世界的物理性質。數學是最純粹的藝術，同時也最容易受到誤解。

這種主張應該是呼應了英國偉大數家哈第（Godfrey H. Hardy）之觀點：數學家是理念模式（patterns of ideas）的創造者。在他的《一個數學家的辯白》（*A Mathematician's Apology*）中，哈第藉此宣揚他的柏拉圖主義（Platonism）。不過，拉克哈特卻將柏拉圖的理念（ideas）拉回到人類玩遊戲的層次：「我純粹就是在玩。這就是數學——想知道、遊戲、用自己的想像力來娛樂自己。」在遊戲情境中，吾人會基於天生的好奇，而開始探索。而這無非是人類學習活動的最重要本質所在。因此，正如本書所討論，比較下列兩個問題：

問題一：給定一個長方形，在長邊任取一點與此長方形的兩個頂點連接，而形成為一個三角形，那麼，這個三角形佔據了長方形多少的空間？

問題二：利用面積公式，計算上述三角形之面積。

前者充滿了探索的趣味，後者則是要求學生死背公式，然後在習題中反覆「應用」。於是，「興奮之情、樂趣、甚至創造的過程會有的痛苦與挫折，全都消磨殆盡了。再也沒有困難了。問題在提出來時也同時被解答了——學生沒事可做。」對於這種強調精準卻無靈魂的操弄符號的文化及其價值觀，拉克哈特利用上述簡例戳破它的虛假，這是我大力推薦本書的第一個理由。

在〈學校裡的數學〉這一節中，拉克哈特指出教改迷思，在於它企圖「要讓數學變有趣」，以及「與孩子們的生活產生關連」。針對者兩點，他的批判非常犀利：「你不需要讓數學有趣——它本來就遠超過你了解的有趣！而它的驕傲就在與我們的生活完全無關。這就是為什麼它是如此有趣！」顯然為了達到「有趣」與「關連」的目的，教科書的編寫難免牽強而做作。譬如，為了幫助學生記憶圓的面積和圓周的公式，拉克哈特建議：與其發明一套圓周先生（Mr. C）和面積太太（Mrs. A）的故事，不如敘說阿基米德甚至劉徽有關圓周率的探索史實，說不定更能觸動學生的好奇心靈。這種強調「發生認識論」（genetic epistemology）的歷史關懷，也與他批判數學課程的缺乏歷史感互相呼應。

拉克哈特對於數學課程的僵化之批判，還包括它所連結的「階梯的迷思」，他認為這種一個主題接一個主題的進階安排，除了淘汰「失敗的」學生之外，根本沒有其他目標可言。因此，學校裡的數學教育所依循的，「是一套沒有歷史觀點、沒有主題連貫性的數學課程，支離破碎的收集了分類的主題和技巧，依解題程序的難易度湊合在一起」。相反的，「數學結構，不論是否具有實用性，都是在問題背景之內發明及發展出來的，然後從那個背景衍生出它們的意義」。

或謂中學幾何可以滿足此一智性需求，不過，拉克哈特卻將它稱為「邪惡的工具」。作者在〈中學幾何：邪惡的工具〉這節中，指出數學證明的意義在於「說明，而且應該說明得清楚、巧妙且直截了當」，同時，只有當你想像的物件之行為違反了直覺，或者有矛盾出現時，嚴謹的證明才有其必要，而這當然也符合歷史真實。基於此，他批判詳列「敘述 / 理由」的這種「兩行證明」（two-column proof）既沈悶又「沒有靈魂」，學生只是被訓練去模仿，而不是去想出論證！

在作者深刻批判學校數學、課程綱要以及幾何證明之後，他還提供了一個目前通行的「標準數學課程」之真相，這個戳破學校數學（school mathematics）神話的深刻反思，是我大力推薦本書的第二個理由。

在上篇解構性的「大破」之後，拉克哈特在本書下篇中，為我們貢獻了令人鼓舞的「大立」，這是我大力推薦本書的第三個理由。在本篇中，拉克哈特想像了一個數學實在，其中「充滿了我們為了娛樂自己而建構出來的（或是偶然發現）的有趣又可愛的架構。我們觀察它們、留意它們的模式、嘗試做出簡捷又令人信服的敘述，來解釋它們的行為」。至於如何做數學？拉克哈特利用實例，告訴我們「與模式遊戲、注意觀察事物、做出猜測、尋找正反例、被激發去發明和探索、製做出論證並分析論證，然後提出新的問題」。此外，他還特別提醒我們：小孩子都知道學習和遊戲是同一回事。可惜，成年人已然忘卻。因此，他最後給讀者的實用忠告是：玩遊戲就對了！做數學不需要證照。數學實在是你的，往後的人生你都可以悠遊其中。

總之，本書作者分享了他自己探索數學知識活動全新面向的深刻體會，其中他認為數學如同音樂、繪畫及詩歌一樣，也是一門藝術。同時，學習與遊戲是同一回事。因此，在遊戲的情境中，基於人類天生的好奇心而探索模式，才是學習數學的正道。這也部份解釋了何以他那麼重視數學史的殷鑑，因為數學都是從歷史脈絡（context）產生，並因而獲得意義。

對於教師或甚至家長來說，如果你覺得本書的主張太過基進，不妨參考作者的玩數學比喻，那麼，你對數學學習一定會有全新的體會。根據寵物書籍的說明，離開幼兒階段還喜歡遊戲的，只有成年人和成犬這兩個物種。人類幼童利用遊戲來學習，甚至包括數學。我們有幸帶領小孩子時，何嘗不可繼續玩下去呢？∞

本文出處
本文為《一個數學家的嘆息》之推薦序。