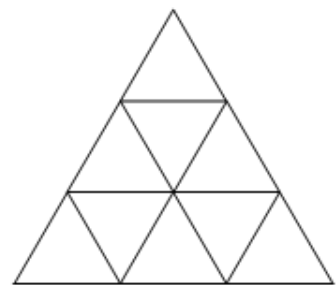


數學閒話—玩玩看三角形魔陣

文·圖 電工78級/田銘茗

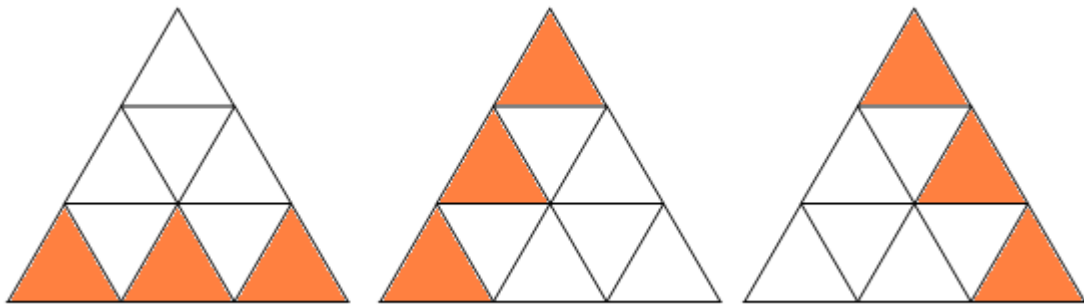
魔方陣(magic square)是很有趣的數學遊戲，規則很簡單，變化卻多端。今年適逢豬年，歲次丁亥，不豬一豬怎麼可以呢？咱們模仿正方形魔陣，亦即通稱的魔方陣，試試看用三角形來玩魔陣吧！

吾人可將9個小正三角形拼湊組成一個空白的三角形魔陣，如圖一。全圖為一個三角形魔陣，其中每個小正三角形都是一個格子，必須填入一個1到9的數字，不可重複。三角形魔陣和三階魔方陣一樣，都是由9個格子所組成的。



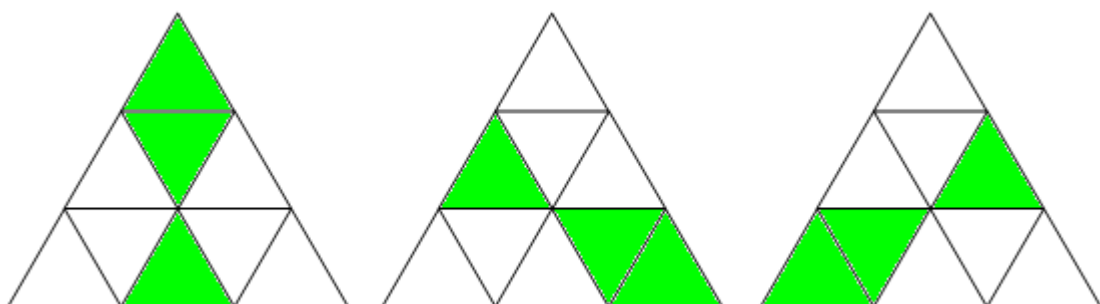
▲圖一

說到三角形，不能不說到邊的問題。在三角形魔陣之三個邊上，每個小正三角形必須填入一個1到9的數字，不可重複，其和應為15，如圖二。



▲圖二

說到三角形，不能不說到高的問題。在三角形魔陣之三個高上，每個小正三角形必須填入一個1到9的數字，不可重複，其和應為15，如圖三。

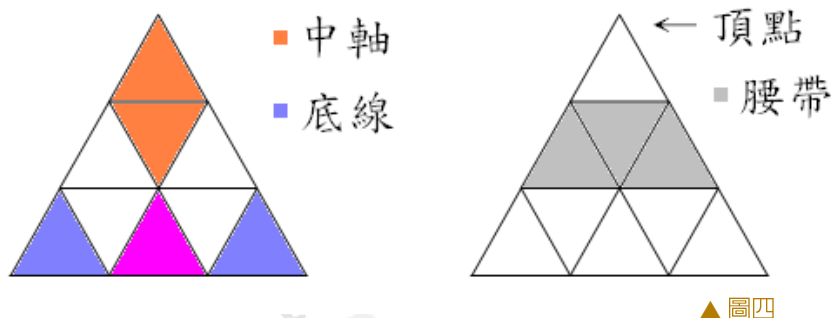


▲圖三

列位看官是否感到奇怪？爲什麼每一邊上格子數字和、每一高上格子數字和一定得是 15 呢？咱們無妨回到三階魔方陣看看，每直行、每橫列與交叉對角線的三個數字和都是 15 啊！三角形魔陣是否也是如此呢？且邊想邊看吧！

接下來的排列問題，便是如何將 1 到 9 的數字填入三角形魔陣，又能滿足上述六項條件。吾人不妨先回到三階魔方陣，找找看 1 到 9 的數字關係，怎樣排列可以得到相等的和呢？因爲 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ ，可以推知三階魔方陣的每直行、每橫列或交叉對角線之格子數字和必然是 45 的三分之一，等於 15。而 1 到 9 的數字須任選三個，使其和等於 15。吾人逐個找找看，尋尋覓覓，答案是爲 1 及 6 及 8、1 及 5 及 9、2 及 4 及 9、2 及 5 及 8、2 及 6 及 7、3 及 4 及 8、3 及 5 及 7、4 及 5 及 6，只此八種數字組合，沒有別的了。

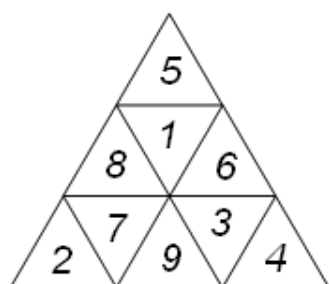
三角形魔陣上 1 到 9 的數字應該怎麼排列呢？我所採用的辦法是先把與水平底邊垂直的高當作中軸，並將以上八種數字組合逐一填入中軸上的格子，另把相配符合的數字組合填入水平底邊的格子，以數字組合一個一個去試算。中軸是代表垂直之高，底線是代表水平底邊，如圖四。此外頂點代表位居上方之頂點格子，腰帶代表在頂點下方的 3 個連續格子，位置亦如圖四。



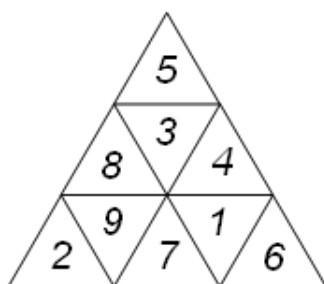
▲圖四

幾經艱難，去掉經過旋轉與翻轉可得到的相同構造，我只找到下列四種三角形魔陣，如圖五、圖六、圖七、圖八。

圖五的答案沒有用到的組合是 1 及 6 及 8、3 及 5 及 7。



▲圖五



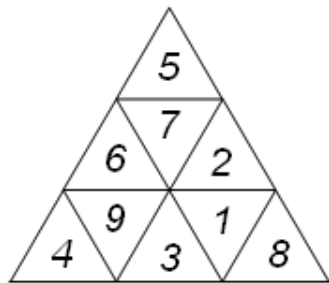
▲圖六

圖六的答案沒有用到的組合是 3 及 4 及 8、1 及 5 及 9。

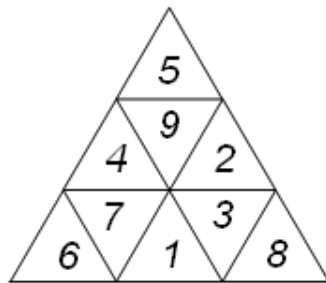
圖七的答案沒有用到的組合是 2 及 6 及 7、1 及 5 及 9。

圖八的答案沒有用到的組合是 2 及 4 及 9、3 及 5 及 7。

以三階魔方陣而言，可以說最重要的一件事是把數字 5



▲圖七

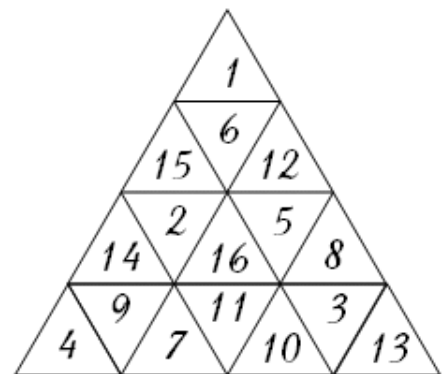


▲圖八

的位置，務必放在九宮格中央。跑回來看看三角形魔陣，數字5應當居於頂點，如此看起來答案會比較有系統一些。另外在底線上的兩個頂點格子必須填入偶數，而且中軸上的數字組合不是1及5及9，便是3及5及7，都是奇數。接著吾人找出底線上可與中軸呼應的數字組合，再以剩下的數字組合填入剩下的空格子，即可得出整個三角形魔陣。咱們仔細瞧瞧圖五、圖六、圖七、圖八，在三角形魔陣的兩個翅膀邊邊上，數字組合不是2及5及8，便是4及5及6；更令我感到有趣的是在其腰帶的位置上，可以看到一組沒有用到的數字組合。我也不知作何解釋，奇特一下罷了！

三階三角形魔陣已找到如上述的答案，那麼四階、五階以上的三角形魔陣又當作何解呢？我想這樣狀況更是複雜，最好是用電腦程式去跑跑看。其實四階三角形魔陣的編造可以參考四階魔方陣，根據其中的數字關係，俺便可以抄一抄、湊一湊答案。每個邊的格子數字和與每個高的格子數字和都是34，如圖九。其實只要數字位置調整得好，連由四個相鄰小正三角形所拼成的中正三角形，其格子內各數字和也等於34哦！嗯，看起來這似乎是魔術中的神奇數字囉！

不過我看此等魔術遊戲除了拼拼、算算、玩玩，益智一點滴以外，的確想不出到底有什麼實用價值哩！列位看官是否想到魔方陣有什麼用途呢？中世紀傳說認為魔方陣可以祛除憂鬱，三角形魔陣有無此等效果呢？誰知道啊！數學本來便是無聊的遊戲，姑且當作有此效果吧！反正這些個遊戲無論怎麼搞，都是和專利掛不上鉤的，也好茶餘飯後莫等閒，玩弄雕蟲小技，自己和自己互動，動紙筆推算一番。等到哈欠連連時，便可去寢室找愛妻睡覺了。



▲圖九

魔方陣在古代稱為縱橫圖或幻方。我如果是三角形魔陣得取個比較古意名稱的話，不妨稱作幻三角吧！無論古今四方，三這個數字似乎都很有重要的象徵意義。在佛教講三藏、三寶，在神學講三位一體，連政治學也講三權分立、三民主義。自己倒是覺得人性是由三個部分所組成的，亦即「慾性、感性、理性」。吾人只要把握此三性的矛盾、衝突、協調、轉變、平衡、和諧，便可克己復禮，進而不忤不求，知足常樂。友聲