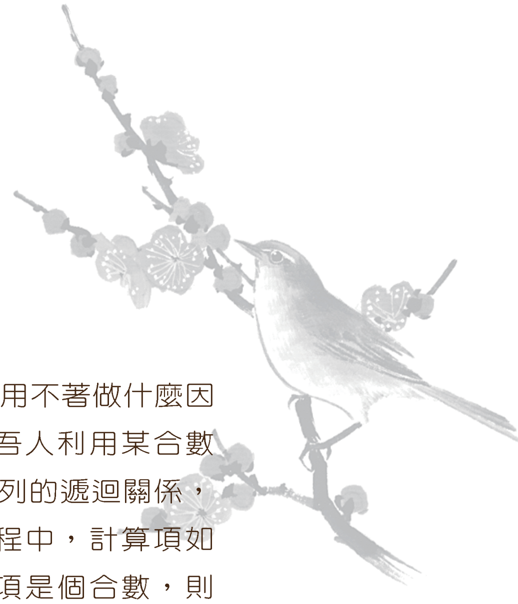
數學閒話—質因數數列你我她（上）

文・田銘茗

日子過得真快，秋去冬來，又當歲末了。鼠年說鼠，鼠見鼠愛，鼠來鼠去，又可以來玩玩捉迷藏、躲貓貓了。蓋鼠、數二字諧音，鼠來寶便成為一句吉祥話了！列位看官，您數來寶了嗎？不過在日常生活中，把別人比為鼠輩、鼠類，則是戲謔、輕蔑的意思。老鼠俗稱耗子，擅長東啃啃、西咬咬，神出鬼沒，晝伏夜出。所謂投鼠忌器，那可不是鬧著玩的喔！雖然俺不太會說相聲，卻也可以數得起勁。有道是：「窩藏電腦鍵盤鼠來寶，移來滑去早點去睡覺。望穿螢幕愛情雖煩惱，賞罷烏圖別忘常歡笑。」

數量與行為息息相關，數似乎是無所不在的，而吾人實際應當如何計算數量呢？當然是有請算術出場了！數學的起源是算術，而算術不是在數食物、數貝殼、數玩具嗎？古人比手畫腳，又是刻板、結繩、運籌、串珠，數來數去，數出了自然數。自然數便是最容易數算的數列了。所以數學之數來寶者，自當屬數列無疑焉。數列必有其開始數字，依既定規則產生各項數字，按其次序，後項要依循前項而變化。在數學的小天地裏，數列的問題向來是很多的，像是等差數列、等比數列、三角形數列、五邊形數列、六邊形數列、兔子數列等等；而質數的數列更是令人沉迷不已，此間數字何其神妙，戀戀乎朦朧美矣，使人如墮五里霧中。數數看自然數，加、減、乘、除，盈或不足。計算不夠者便產生了負整數的觀念，此倒是個從量變到質變的轉變過程。蓋數學者，計算與幾何之往復也。苟欲求學海之深淺者，豈可無數於術，而無術於數哉！

無論負整數、零與正整數，都是整數的材料。研究整數的問題與答案，是為數論。從古到今，數論的核心便是質數謎團。走筆至此，俺先得回顧一下名詞解釋。自然數可以分成三大類：數位數只有兩個，亦即 0 與 1 。質數又可稱為素數，是只能被 1 或本身所整除的數，例如 2 、3 、5 、7 等等。合數是可以被 1 與本身以外的整數所整除的數，例如 4 、6 、8 、9 等等。一般來說，合數在因數分解時通常都用來當被除數。若有一自然數可以當除數而整除某合數，便是此合數的因數。若此因數適為質數，便是此合數的質因數。若該因數小於此合數，便是此合數的真因數。所以 1 雖然不是質數，也可以算是自己與任何質數、合數的真因數。而算術基本定理是說，任意二以上、大於一的自然數都可以表示成所屬質因數的



冪次乘積，且其形式是唯一的。質數只能被 1 或本身所整除，當然用不著做什麼因數分解。而任何一個合數，都可以做出標準的質因數分解。所以吾人利用某合數做質因數分解所產生的數字和，以之代替原合數，透過類似兔子數列的遞迴關係，便可以用來產生數列，亦即質因數數列。在質因數數列之試算過程中，計算項如果是個數位數或質數，則保持原樣，不做質因數分解。如果計算項是個合數，則進行質因數分解，求出各數字之和，用以代替原合數。然後前項與後項相加，得出新項。如此反覆計算，便可算出質因數數列。當然啦！我最感興趣的是此數列裏頭有無數字迴圈產生呢？先別著急，動筆算算便可知曉了。

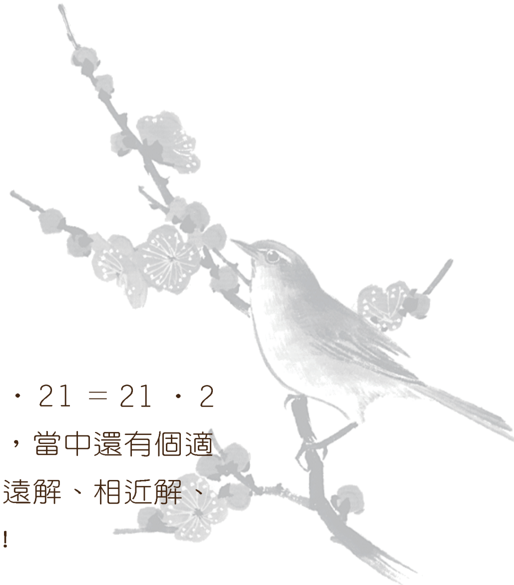
在合數做質因數分解時，為了簡化運算符號起見，吾人可以將質因數乘積的乘號予以省略，同時把各質因數寫進括弧裡面。先寫出較小數，後寫出較大數，而且重複出現的質數不寫成幾次方記號，而是重複表示。原合數便可寫在括弧左邊。原合數做質因數分解之各數字和可寫在括弧右邊。左右括弧之間便是原合數的質因數分解。例如 6 等於 2 乘以 3 ，符號寫作(2　3)；36 等於 2 的平方，乘以 3 的平方，符號寫作(2　2　3　3)。以上只不過是簡化記號，關於質因數數列的啓動，玩家須先給定首項與次項，然後按照例行公事，此數字能不能質因數分解呢？算算看。茲取首項 14 ，次項 77 ，試算如下，14(2　7)9 、77(7　11)18 、27(3　3　3)9 、27(3　3　3)9 、18(2　3　3)8 、17 、25(5　5)10 、27(3　3　3)9 、19 、28(2　2　7)11 、30(2　3　5)10 、21(3　7)10 、20(2　2　5)9 、19 、28(2　2　7)11 、30(2　3　5)10 、21(3　7)10 、20(2　2　5)9 、…，以下同上，進入迴圈。如此便可得到一個五項迴圈，亦即 19 、28 、30 、21 、20 ，吾人可按其中唯一的質數稱為 19 迴圈。而吾人使用質數為首項、次項時，不知其質因數數列之推演如何？甭急！茲取首項 5 ，次項 17 ，試算如下，5 、17 、22(2　11)13 、30(2　3　5)10 、23 、33(3　11)14 、37 、51(3　17)20 、57(3　19)22 、42(2　3　7)12 、34(2　17)19 、31 、50(2　5　5)12 、43 、55(5　11)16 、59 、75(3　5　5)13 、72(2　2　2　3　3)12 、25(5　5)10 、22(2　11)13 、23 、36(2　2　3　3)10 、33(3　11)14 、24(2　2　2　3)9 、23 、32(2　2　2　2　2)10 、33(3　11)14 、24(2　2　2　3)9 、23 、32(2　2　2　2　2)10 、…，以下同上，進入迴圈。如此便可得到一個四項迴圈，亦即 33 、24 、23 、32 ，吾人可按其中唯一的質數稱為 23 迴圈。在日復一日的試算中，我換過一些其他自然數的起始數對，用以推算質因數數列，得到的結果幾乎都是這兩個數字迴圈。

總體來說，質因數分解其實是因數分解的特殊狀況，因為此規則限制在整數除法中使用的除數必須是個質數，是以合數皆可表示為所屬質因數的冪次乘積。

例如：12 ＝ 2 ・ 2 ・ 3 ，18 ＝ 2 ・ 3 ・ 3 ，24 ＝ 2 ・ 2 ・ 2 ・ 3 ，32 ＝ 2 ・ 2 ・ 2 ・ 2 ・ 2 ，42 ＝ 2 ・ 3 ・ 7 ，75 ＝ 3 ・ 5 ・ 5 ，92 ＝ 2 ・ 2 ・ 23 ，95 ＝ 5 ・ 19 ，102 ＝ 2 ・ 3 ・ 17 ，119 ＝ 7 ・ 17 。可是列位看官您想想看，一般人想到數字 12 時，隨即引起的印象恐怕是 12 ＝ 2 ・ 6 ＝ 6 ・ 2 ，12 ＝ 3 ・ 4 ＝ 4 ・ 3 。想到數字 32 時，隨即引起的印象恐怕是 32 ＝ 2 ・ 16 ＝ 16 ・ 2 ，32 ＝ 4 ・ 8 ＝ 8 ・ 4 。想到數字 42 時，隨即引起的印象恐怕是 42 ＝ 2 ・ 21 ＝ 21 ・ 2 ，42 ＝ 3 ・ 14 ＝ 14 ・ 3 ，42 ＝ 6 ・ 7 ＝ 7 ・ 6 ，這是在幹什麼呢？其實便是真因數相乘與乘法交換律呀！說來這種刻板印象是在日常計算中自然產生的，也與九九乘法表之勤於背誦與頻繁使用不無關係呢！

吾人對某合數做因數分解，應用除數以質數為限者，是謂質因數分解。如果吾人變更設計條件，要求用於因數分解之除數須為大於一的整數，但是不限於質數，因數分解便可以變變更多花樣了！接著吾人以質因數分解為基礎，設想一般自然數之因數分解，倘使分解的因數個數限用二項，可是不限定非質數不可，可姑且稱之為雙因數分解。雖然此處的除數不限定用質數，然而整除還是要有簡易規則可循。仔細看看某合數的雙因數分解，必有較大因數、較小因數之別，雖然都是真因數，彼此間必然有所差距。若是在此合數為某質數之平方數時，雙因數分解的結果便是兩個同樣的質數，即彼此之間無所差距。例如，因數分解 9 ＝ 3 ・ 3 ，互為同數，並無差距。因數分解 14 ＝ 2 ・ 7 ＝ 7 ・ 2 ，差距 5 。因數分解 21 ＝ 3 ・ 7 ＝ 7 ・ 3 ，差距 4 。因數分解 25 ＝ 5 ・ 5 ，互為同數，並無差距。因數分解 169 ＝ 13 ・ 13 ，互為同數，並無差距。此外吾人一併考慮因數分解之各數字和，合數的記號便可寫作 9(3　3)6 、14(2　7)9 、21(3　7)10 、25(5　5)10 、169(13　13)26 等等，依此類推。

吾人的問題在於某合數的雙因數分解往往不只一種。在此吾人無妨來個稱呼分類，亦即兩個因數彼此差距最大者，可稱為相遠因數分解，簡稱為相遠解；而兩個因數彼此差距最小者，可稱為相近因數分解，簡稱為相近解。至於兩個因數彼此差距在最大差距與最小差距之間者，可稱為適中因數分解，簡稱為適中解。另外對某合數的因數分解，又以質數為限者，亦即以所屬質因數之冪次乘積形式為其因數分解者，可稱為標準因數分解，簡稱為標準解。此處敘述有點兒太冗長了，還是舉例算算看吧！以 15 而言，標準解應寫成 15 ＝ 3 ・ 5 ，此形式剛好是唯一可行的雙因數分解，所以 15 ＝ 3 ・ 5 ＝ 5 ・ 3 ，差距 2 ，既是相近解，又是相遠解，此外並無適中解可言。以 20 而言， 20 ＝ 2 ・ 2 ・ 5 乃是標準解， 20 ＝ 2 ・ 10 ＝ 10 ・ 2 乃是差距 8 的相遠解，20 ＝ 4 ・ 5 ＝ 5 ・ 4 乃是差距 1 的相近解，此外並



無適中解可言。以 42 而言，42 ＝ 2 ‧ 3 ‧ 7 乃是標準解，42 ＝ 2 ‧ 21 ＝ 21 ‧ 2 乃是差距 19 的相遠解，42 ＝ 6 ‧ 7 ＝ 7 ‧ 6 乃是差距 1 的相近解，當中還有個適中解，亦即 42 ＝ 3 ‧ 14 ＝ 14 ‧ 3 ，差距 11 。這些個標準解、相遠解、相近解、適中解，一樣都是某合數的因數分解，表示形式可是各不相同啦！

所謂雙因數分解，便是請玩家限用兩個數字做出某合數之因數分解，如此而已。至於記號嘛…，吾人無妨效法質因數分解的記號，某合數的雙因數分解可寫入括弧當中，乘號一律省略，較小數字居左，較大數字居右。原合數可寫在括弧左側，各數字之和可寫在括弧右側。例如，雙因數分解只有一種者：15(3 5)8 ，有二種者：20(2 10)12 、20(4 5)9 ，有三種者：42(2 21)23 、42(3 14)17 、42(6 7)13 ，依此表述，其餘類推。

固然吾人可以仿傚兔子數列的辦法，運用各項質數、各項合數做標準解之各數字和，相加來推演質因數數列。舉一反二，那麼相遠解、相近解是否也可以用來推演質因數數列呢？做法還是要腳踏實地，吾人先須設定首項與次項，數位數或質數便可照抄不誤，合數則須看看是相遠因數分解或是相近因數分解，進而求其各數字之和，用以代替原合數，並且使前後項相加而產生新項，再觀察各項數字變化情形，有沒有產生數字循環呢？當然啦！如果該計算項剛好是個數位數或質數，則保留原樣，不宜做任何因數分解。

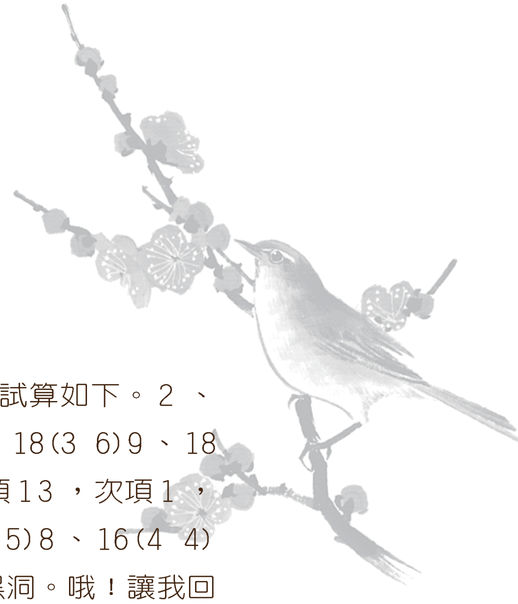
咱們先來看看運用相遠解的質因數數列。亦即吾人將合數做雙因數分解，取其差距最大的數對。咱們先來看看質數表裡面，可知 29 、31 是一對孿生質數。吾人便應用 29 、31 為起始數對，茲取首項 29 ，次項 31 ，試算如下，29 、31 、60(2 30)32 、63(3 21)24 、56(2 28)30 、54(2 27)29 、59 、88(2 44)46 、105(3 35)38 、84(2 42)44 、82(2 41)43 、87(3 29)32 、75(3 25)28 、60(2 30)32 、60(2 30)32 、64(2 32)34 、66(2 33)35 、69(3 23)26 、61 、87(3 29)32 、93(3 31)34 、66(2 33)35 、69(3 23)26 、61 、87(3 29)32 、93(3 31)34 、…，以下同上，進入迴圈。由此吾人可見一個五項迴圈，亦即 66 、69 、61 、87 、93 。其中唯一質數為 61 ，吾人可按此質數稱為 61 迴圈。

我想無妨找出兩個質數，條件為其十位數字與個位數字相反，用為起始數對，例如 37 與 73 。茲取首項 37 ，次項 73 ，試算如下。37 、73 、110(2 55)57 、130(2 65)67 、124(2 62)64 、131 、195(3 65)68 、199 、267(3 89)92 、291(3 97)100 、192(2 96)98 、198(2 99)101 、199 、300(2 150)152 、351(3 117)120 、272(2 136)138 、258(2 129)131 、269 、400(2 200)202 、471(3 157)

160 、362(2 181)183 、343(7 49)56 、239 、295(5 59)64 、303(3 101)104 、168(2 84)86 、190(2 95)97 、183(3 61)64 、161(7 23)30 、94(2 47)49 、79 、128(2 64)66 、145(5 29)34 、100(2 50)52 、86(2 43)45 、97 、142(2 71)73 、170(2 85)87 、160(2 80)82 、169(13 13)26 、108(2 54)56 、82(2 41)43 、99(3 33)36 、79 、115(5 23)28 、107 、135(3 45)48 、155(5 31)36 、84(2 42)44 、80(2 40)42 、86(2 43)45 、87(3 29)32 、77(7 11)18 、50(2 25)27 、45(3 15)18 、45(3 15)18 、36(2 18)20 、38(2 19)21 、41 、62(2 31)33 、74(2 37)39 、72(2 36)38 、77(7 11)18 、56(2 28)30 、48(2 24)26 、56(2 28)30 、56(2 28)30 、60(2 30)32 、62(2 31)33 、65(5 13)18 、51(3 17)20 、38(2 19)21 、41 、62(2 31)33 、74(2 37)39 、72(2 36)38 、77(7 11)18 、56(2 28)30 、48(2 24)26 、56(2 28)30 、56(2 28)30 、60(2 30)32 、62(2 31)33 、65(5 13)18 、51(3 17)20 、…，以下同上，進入迴圈。由此吾人可見一個較長的迴圈，亦即38 、41 、62 、74 、72 、77 、56 、48 、56 、56 、60 、62 、65 、51 。此迴圈共計十四項，其中唯一的質數為41 ，吾人可按此質數稱為41 迴圈。有趣的是當中數字56 竟然出現了三次。我試了一些自然數作為起始數對，用以推算相遠解的質因數數列。結果61 迴圈出現的概率較小，而41 迴圈出現的概率較大。在此處迴圈短者出現得較少，迴圈長者反而出現得較多。

大概數字迴圈太長，看起來也頗累人的，還好接下來的迴圈比較短些。且來看相近解的質因數數列吧！亦即吾人將某合數做雙因數分解，取其差距最小的數對。茲取首項10 ，次項20 ，試算如下，10(2 5)7 、20(4 5)9 、16(4 4)8 、17 、25(5 5)10 、27(3 9)12 、22(2 11)13 、25(5 5)10 、23 、33(3 11)14 、37 、51(3 17)20 、57(3 19)22 、42(6 7)13 、35(5 7)12 、25(5 5)10 、22(2 11)13 、23 、36(6 6)12 、35(5 7)12 、24(4 6)10 、22(2 11)13 、23 、36(6 6)12 、35(5 7)12 、24(4 6)10 、…，以下同上，進入迴圈。由此可見一個五項迴圈，亦即22 、23 、36 、35 、24 ，其中唯一質數為23 ，吾人可按此質數稱為23 迴圈。請列位看官注意區別，此五項迴圈與之前標準解的質因數數列，其中四項迴圈－23 、32 、33 、24 相比，雖然都有同一個質數，其實內容並不一樣喔！

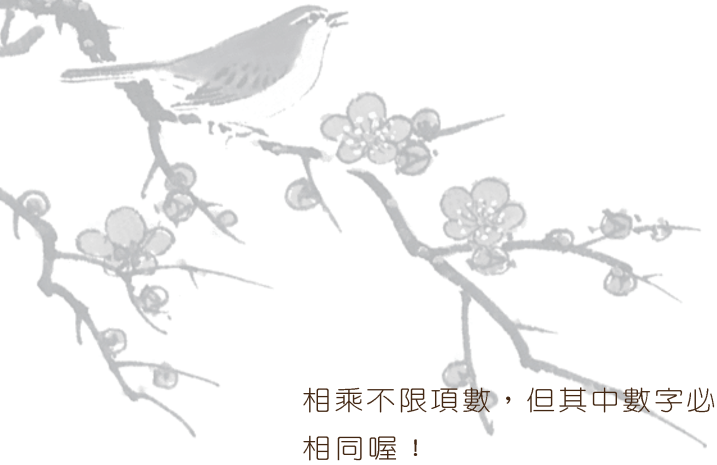
茲取首項240 ，次項140 ，試算如下，240(15 16)31 、140(10 14)24 、55(5 11)16 、40(5 8)13 、29 、42(6 7)13 、42(6 7)13 、26(2 13)15 、28(4 7)11 、26(2 13)15 、26(2 13)15 、30(5 6)11 、26(2 13)15 、26(2 13)15 、30(5 6)11 、…，以下同上，進入迴圈。由此可見一個三項迴圈，亦即26 、26 、30 ，其中沒有質數喔！這可真是個袖珍迴圈哪！可喜的是相近解的質因數數列也



可以找到單項的數字迴圈，亦即數字黑洞。茲取首項2 ，次項1 ，試算如下。 2 、1 、3 、4(2 2)4 、7 、11 、18(3 6)9 、20(4 5)9 、18(3 6)9 、18(3 6)9 、18(3 6)9 、…，以下同上，進入了18 的數字黑洞。另外，茲取首項13 ，次項1 ，試算如下，13 、1 、14(2 7)9 、10(2 5)7 、16(4 4)8 、15(3 5)8 、16(4 4)8 、16(4 4)8 、16(4 4)8 、…，以下同上，進入了16 的數字黑洞。哦！讓我回憶起來，16 在標準解的質因數數列中也是個不折不扣的數字黑洞呢！我試用了一些自然數，隨機選擇作為起始數對，用以推算相近解的質因數數列。結果26 、26 、30 迴圈與兩個黑洞一18 、16 ，出現的概率較小，而23 迴圈出現的概率較大，是主要的數字迴圈。

翻筋斗一般的迴圈把戲變過了，俺還是得想想理論哪！因為已知某合數的質因數分解是唯一的，此唯一的質數相乘展開形式姑且可稱為標準解。然後玩家給定首項與次項，則質因數數列的推演過程也是唯一的。但是因數分解並不是非得用質數不可呀！所以吾人可以模仿標準解的質因數數列，以相近解、相遠解代替標準解，算出其各數字之和，用以推演數列各項。但是問題還沒完了，為什麼吾人不能運用適中解推演數列各項呢？這是有其選擇上的困難了。因為某合數之雙因數分解不一定會有適中解，不然便是有適中解，卻好幾個數對一起出來，不只一對適中解，於是令人難以抉擇啦！玩家只要知道合數在雙因數分解時的較大因數、較小因數，然後比較各對答案之數字差距，相近解、相遠解可以各自取得一對，並無疑問。除非此合數的雙因數分解是獨一無二的，只此一家，別無分號。不過這樣倒也沒有什麼疑問，一群異類中總是也會有同類出現的機會。相近解、相遠解當然也可能正好是同一數對，彼此混同，一體適用，這樣的例子其實也不在少數呢！以35 為例，唯一的因數分解是35 ＝5 ・7 ＝7 ・5 ，差距2 。以65 為例，唯一的因數分解是65 ＝5 ・13 ＝13 ・5 ，差距8 。以94 為例，唯一的因數分解是94 ＝2 ・47 ＝47 ・2 ，差距45 。所以35 、65 、94 三數字的相近解、相遠解其實都等於自身的標準解，並無適中解可言。如此唯有一種因數分解的合數，祇能表示成二相同質數或二相異質數之乘積，並且只有一種答案，我想如此唯一而獨特的因數分解可以稱為唯獨因數分解，簡稱為唯獨解。吾人對某合數做雙因數分解而遇到唯獨解時，不管是相近解、相遠解，其實不都等於唯獨解了嗎？而其適中解便無處可尋了！

雙因數分解只有唯獨解的合數，其相近解、相遠解都可視為同於唯獨解。值得注意的是，唯獨解不一定同於標準解。因為某合數之唯獨解限用兩個數字相乘，亦即雙因數分解，而這兩個數字不全是質數。某合數之標準解便是質因數分解，



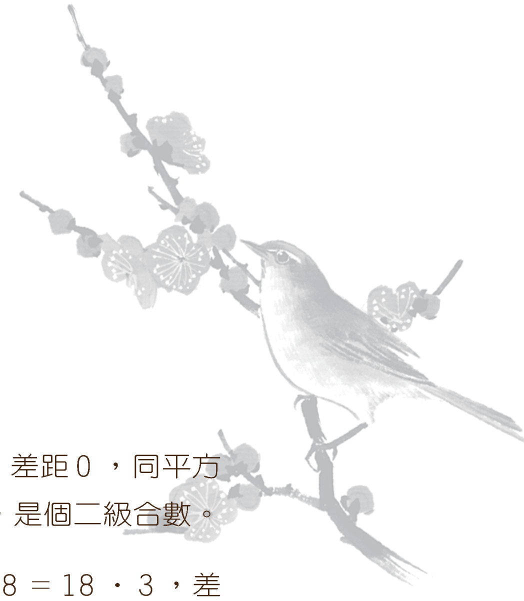
相乘不限項數，但其中數字必須都是質數。由此可知，唯獨解、標準解的意義不相同喔！

吾人檢查一下在200以內的合數，具有唯獨解者如下：4（2　2）、6（2　3）、8（2　4）、9（3　3）、10（2　5）、14（2　7）、15（3　5）、21（3　7）、22（2　11）、25（5　5）、26（2　13）、27（3　9）、33（3　11）、34（2　17）、35（5　7）、38（2　19）、39（3　13）、46（2　23）、49（7　7）、51（3　17）、55（5　11）、57（3　19）、58（2　29）、62（2　31）、65（5　13）、69（3　23）、74（2　37）、77（7　11）、82（2　41）、85（5　17）、86（2　43）、87（3　29）、91（7　13）、93（3　31）、94（2　47）、95（5　19）、106（2　53）、111（3　37）、115（5　23）、118（2　59）、119（7　17）、121（11　11）、122（2　61）、123（3　41）、125（5　25）、129（3　43）、133（7　19）、134（2　67）、141（3　47）、142（2　71）、143（11　13）、145（5　29）、146（2　73）、155（5　31）、158（2　79）、159（3　53）、161（7　23）、166（2　83）、169（13　13）、177（3　59）、178（2　89）、183（3　61）、185（5　37）、187（11　17）、194（2　97）。吾人歸納以上諸數，可分成三大類，亦即某質數之平方數、某質數之立方數，以及二相異質數的一次乘積。而這些數字當中仍有所區別，以某質數之平方數或二相異質數的一次乘積而言，唯獨解便同於標準解，倒沒有問題。但以某質數之立方數而言，唯獨解便不同於標準解。例如8是2的立方數，唯獨解是（2　4），標準解是（2　2　2）；27是3的立方數，唯獨解是（3　9），標準解是（3　3　3）；125是5的立方數，唯獨解是（5　25），標準解是（5　5　5）。都不一樣喔！

不過，吾人從以上敘述再深入想想看，某合數之雙因數分解是不是有唯獨解呢？相近解的數對與相遠解的數對同樣嗎？觀察其成對因數之數字差距，其中有沒有適中解呢？有適中解的話，可以有幾對呢？由此顯然帶出一個新問題，同樣是合數，其間似乎猶可有所區別。我以為光知道某數是不是合數還嫌不夠，還要看此合數是哪一級的？亦即首先吾人提問：數位數乎？質數乎？合數乎？其次吾人提問：若此數是合數，其級數幾何？所謂合數的級數，即是此合數在乘法交換律得允許時，數字1與本身不算，可以表示成幾種雙因數分解。換句話說，凡合數做雙因數分解有唯獨解者皆是個一級合數。接著我想再找幾個合數，試算看看級數是多少？

試算合數4，4＝2・2，差距0，同平方根，無所差距。所以4有同樣的相近解、相遠解（2　2），無適中解，是個一級合數。

試算合數10，10＝2・5＝5・2，差距3。所以10有同樣的相近解、相遠



解(2　5)，無適中解，又是個一級合數。

試算合數16，16＝2・8＝8・2，差距6；16＝4・4，差距0，同平方根，無所差距。所以16有相近解(4　4)、相遠解(2　8)，無適中解，是個二級合數。

試算合數54，54＝2・27＝27・2，差距25；54＝3・18＝18・3，差距15；54＝6・9＝9・6，差距3。所以54有相近解(6　9)、相遠解(2　27)與1個適中解(3　18)，是個三級合數。

試算合數72，72＝2・36＝36・2，差距34；72＝3・24＝24・3，差距21；72＝4・18＝18・4，差距14；72＝6・12＝12・6，差距6；72＝8・9＝9・8，差距1。所以72有相近解(8　9)、相遠解(2　36)，以及3個適中解(3　24)、(4　18)、(6　12)，是個五級合數。

試算合數100，100＝2・50＝50・2，差距48；100＝4・25＝25・4，差距21；100＝5・20＝20・5，差距15；100＝10・10，平方根無所差距。所以100有相近解(10　10)、相遠解(2　50)，以及2個適中解(4　25)、(5　20)，是個四級合數。

試算合數108，108＝2・54＝54・2，差距52；108＝3・36＝36・3，差距33；108＝4・27＝27・4，差距23；108＝6・18＝18・6，差距12；108＝9・12＝12・9，差距3。所以108有相近解(9　12)、相遠解(2　54)，以及3個適中解(3　36)、(4　27)、(6　18)，是個五級合數。

試算合數168，168＝2・84＝84・2，差距82；168＝3・56＝56・3，差距53；168＝4・42＝42・4，差距38；168＝6・28＝28・6，差距22；168＝7・24＝24・7，差距17；168＝8・21＝21・8，差距13；168＝12・14＝14・12，差距2。所以168有相近解(12　14)、相遠解(2　84)，以及5個適中解(3　56)、(4　42)、(6　28)、(7　24)、(8　21)，是個七級合數。

試算合數180，180＝2・90＝90・2，差距88；180＝3・60＝60・3，差距57；180＝4・45＝45・4，差距41；180＝5・36＝36・5，差距31；180＝6・30＝30・6，差距24；180＝9・20＝20・9，差距11；180＝10・18＝18・10，差距8；180＝12・15＝15・12，差距3。所以180有相近解(12　15)、相遠解(2　90)，以及6個適中解(3　60)、(4　45)、(5　36)、(6　30)、(9　20)、(10　18)，是個八級合數。

試算合數 240 ，240 ＝ 2 ・ 120 ＝ 120 ・ 2 ，差距 118；240 ＝ 3 ・ 80 ＝ 80 ・ 3 ，差距 77；240 ＝ 4 ・ 60 ＝ 60 ・ 4 ，差距 56；240 ＝ 5 ・ 48 ＝ 48 ・ 5 ，差距 43；240 ＝ 6 ・ 40 ＝ 40 ・ 6 ，差距 34；240 ＝ 8 ・ 30 ＝ 30 ・ 8 ，差距 22；240 ＝ 10 ・ 24 ＝ 24 ・ 10 ，差距 14；240 ＝ 12 ・ 20 ＝ 20 ・ 12 ，差距 8；240 ＝ 15 ・ 16 ＝ 16 ・ 15 ，差距 1 。所以 240 有相近解（15　16）、相遠解（2　120），以及 7 個適中解（3　80）、（4　60）、（5　48）、（6　40）、（8　30）、（10　24）、（12　20），是個九級合數。

試算合數 320 ，320 ＝ 2 ・ 160 ＝ 160 ・ 2 ，差距 158；320 ＝ 4 ・ 80 ＝ 80 ・ 4 ，差距 76；320 ＝ 5 ・ 64 ＝ 64 ・ 5 ，差距 59；320 ＝ 8 ・ 40 ＝ 40 ・ 8 ，差距 32；320 ＝ 10 ・ 32 ＝ 32 ・ 10 ，差距 22；320 ＝ 16 ・ 20 ＝ 20 ・ 16 ，差距 4 。所以 320 有相近解（16　20）、相遠解（2　160），以及 4 個適中解（4　80）、（5　64）、（8　40）、（10　32），是個六級合數。

試算合數 366 ，366 ＝ 2 ・ 183 ＝ 183 ・ 2 ，差距 181；366 ＝ 3 ・ 122 ＝ 122 ・ 3 ，差距 119；366 ＝ 6 ・ 61 ＝ 61 ・ 6 ，差距 55 。所以 366 有相近解（6　61）、適中解（3　122）、相遠解（2　183），是個三級合數。

試算合數 576 ，576 ＝ 2 ・ 288 ＝ 288 ・ 2 ，差距 286 。576 ＝ 3 ・ 192 ＝ 192 ・ 3 ，差距 189 。576 ＝ 4 ・ 144 ＝ 144 ・ 4 ，差距 140 。576 ＝ 6 ・ 96 ＝ 96 ・ 6 ，差距 90 。576 ＝ 8 ・ 72 ＝ 72 ・ 8 ，差距 64 。576 ＝ 9 ・ 64 ＝ 64 ・ 9 ，差距 55 。576 ＝ 12 ・ 48 ＝ 48 ・ 12 ，差距 36 。576 ＝ 16 ・ 36 ＝ 36 ・ 16 ，差距 20 。576 ＝ 18 ・ 32 ＝ 32 ・ 18 ，差距 14 。576 ＝ 24 ・ 24 ，平方根無所差距。所以 576 有相近解（24　24）、相遠解（2　288），以及 8 個適中解（3　192）、（4　144）、（6　96）、（8　72）、（9　64）、（12　48）、（16　36）、（18　32），是個十級合數。

簡而言之，吾人算算看某合數的級數是多少，便是看其因數之中，即 1 與本身不算，有多少對雙因數分解呢？除此之外，如果吾人一併考慮數位數，已知 0 與 1 ，以及所有質數都不能做因數分解的情境，乾脆這樣吧！數位數與質數便可直接定義為「零級合成數」。（待續）友聲

友聲徵信

九十七年十、十一月份

胡文皓	訓導長	續訂一年
簡文通	電控 61 級	續訂一年