數學閒話—質因數數列你我她（下）

文・田銘茗

光陰似箭，日月如梭，鼠年剛去，牛年便來，大家又好過新年了。記得上次是說，數位數與質數便可直接定義為「零級合成數」。

說來俺可是不算不錯，常算常錯。實在懶惰到不行的話，我想不妨寫個簡單的推算程式，讓電腦去做做苦工吧！竊以相遠解推算質因數數列的程式敘述如下。

給入首項，給入次項。印出首項、次項。

按質數表依序讀入各質數成陣列。

始迴圈，一到全部質數項數，註　印出質數陣列各項，

終。

始迴圈，一到全部計算項數，

前求和等於零。後求和等於零。前旗等於零。後旗等於零。

印出下一行。

始迴圈，一到幾個質數，

如果前項除以質數陣列此項之四捨五入等於

前項除以質數陣列此項，且前旗等於零，

則前求和等於前求和加質數陣列此項，加　前項除以質數陣列此項，

如果前項等於質數陣列此項，

則前求和等於前求和減一，結束。註　前項爲質數。

印出質數陣列此項、前項除以質數陣列此項。前旗改成一。

結束。

終。

始迴圈，一到幾個質數，

如果後項除以質數陣列此項之四捨五入等於

後項除以質數陣列此項，且後旗等於零，

數學閒話

則後求和等於後求和加質數陣列此項，加　後項除以質數陣列此項，

如果後項等於質數陣列此項，

則後求和等於後求和減一，結束。註　後項爲質數。

印出質數陣列此項、後項除以質數陣列此項。後旗改成一。

結束。

終。

如果前項小於等於一，　註　前項爲零或一。

則前求和等於前項，結束。

如果後項小於等於一，　註　後項爲零或一。

則後求和等於後項，結束。

註　印出前求和、後求和。

前項換成後項。後項換成前求和、後求和之和。

印出後項。註　亦即新項。

終。

吾人推算質因數數列時，一旦遇到計算項是合數，便可以採用雙因數分解，除了使用相遠解，還有用到相近解。值得注意的是，此段用相近解推算的程式不會用到質數表喔！其原因在於相遠解的答案必然要用到質數參與計算，而相近解的答案則不一定包括質數。竊以相近解推算質因數數列的程式敘述如下。

給入首項，給入次項。印出首項、次項。

始迴圈，一到全部計算項數，

前求和等於零。後求和等於零。前旗等於零。後旗等於零。

印出下一行。

始迴圈，二到自然數極限，

如果前項除以跑圈數之四捨五入等於

前項除以跑圈數，且前旗等於零，

則前求和換成跑圈數，加　前項除以跑圈數。

如果前項等於跑圈數，

則前求和換成前求和減一，結束。註　前項爲質數。

如果前項之平方根小於等於跑圈數，

則前旗改成一。註　印出前項之平方根。

印出前項除以跑圈數、跑圈數。結束。

結束。

終。

始迴圈，二到自然數極限，

如果後項除以跑圈數之四捨五入等於

後項除以跑圈數，且後旗等於零，

則後求和換成跑圈數，加　後項除以跑圈數。

如果後項等於跑圈數，

則後求和換成後求和減一，結束。註　後項爲質數。

如果後項之平方根小於等於跑圈數，

則後旗改成一。註　印出後項之平方根。

印出後項除以跑圈數、跑圈數。結束。

結束。

終。

如果前項小於等於一，　註　前項爲零或一。

則前求和等於前項，結束。

如果後項小於等於一，　註　後項爲零或一。

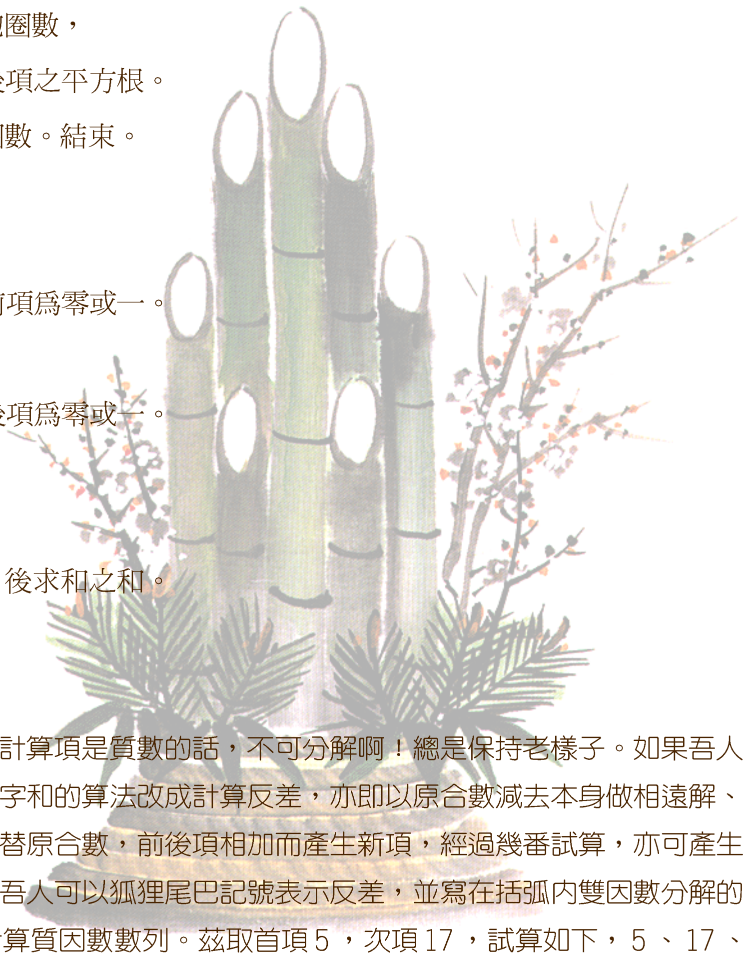
則後求和等於後項，結束。

註　印出前求和、後求和。

前項換成後項。後項換成前求和、後求和之和。

印出後項。註　亦即新項。

終。



在質因數數列的推算過程中，計算項是質數的話，不可分解啊！總是保持老樣子。如果吾人把原合數做相遠解、相近解之各數字和的算法改成計算反差，亦即以原合數減去本身做相遠解、相近解之各數字和，並以此反差代替原合數，前後項相加而產生新項，經過幾番試算，亦可產生迴圈。為了避免數字意義的混淆，吾人可以狐狸尾巴記號表示反差，並寫在括弧內雙因數分解的右方。吾人嘗試以相遠解之反差計算質因數數列。茲取首項 5 ，次項 17 ，試算如下， 5 、 17 、

22（2 11~9）、26（2 13~11）、20（2 10~8）、19、27（3 9~15）、34（2 17~15）、30（2 15~13）、28（2 14~12）、25（5 5~15）、27（3 9~15）、30（2 15~13）、28（2 14~12）、25（5 5~15）、27（3 9~15）、…，以下同上，進入迴圈。由此可見一個四項迴圈—30、28、25、27。茲取首項7，次項19，試算如下，7、19、26（2 13~11）、30（2 15~13）、24（2 12~10）、23、33（3 11~19）、42（2 21~19）、38（2 19~17）、36（2 18~16）、33（3 11~19）、35（5 7~23）、42（2 21~19）、42（2 21~19）、38（2 19~17）、36（2 18~16）、33（3 11~19）、35（5 7~23）、42（2 21~19）、42（2 21~19）、…，以下同上，進入迴圈。由此可見一個六項迴圈—38、36、33、35、42、42。好哇！迴圈竟然有六項的，於是不由得使我想起了化合物中的苯，六氫六碳，也是自成迴圈呢！另外值得注意的是，此處的四項迴圈或六項迴圈，當中各項數字都不是質數喔！

接著吾人嘗試以相近解之反差推算質因數數列。經由電腦程式的幫助，我試算過所有首項與次項都在20以下的情況，都與我用標準解之反差計算時，獲得的數字迴圈相同。舉例來說，茲取首項5，次項2，試算如下，5、2、7、9（3 3~3）、10（2 5~3）、6（2 3~1）、4（2 2~0）、1、1、2、3、5、8（2 4~2）、7、9（3 3~3）、10（2 5~3）、6（2 3~1）、4（2 2~0）、1、1、2、3、5、8（2 4~2）、…，以下同上，進入迴圈。茲取首項3，次項2，試算如下，3、2、5、7、12（3 4~5）、12（3 4~5）、10（2 5~3）、8（2 4~2）、5、7、12（3 4~5）、12（3 4~5）、10（2 5~3）、8（2 4~2）、…，以下同上，進入迴圈。茲取首項11，次項2，試算如下，11、2、13、15（3 5~7）、20（4 5~11）、18（3 6~9）、20（4 5~11）、20（4 5~11）、22（2 11~9）、20（4 5~11）、20（4 5~11）、22（2 11~9）、…，以下同上，進入迴圈。茲取首項2，次項2，試算如下，2、2、4（2 2~0）、2、2、4（2 2~0）、2、2、…，以下同上，進入迴圈。

由此可知，較長的數字循環是個十一項迴圈—7、9、10、6、4、1、1、2、3、5、8，包括2、3、5、7四個質數；還有一個六項迴圈—5、7、12、12、10、8，包括5、7兩個質數，以及兩個僅有三項的袖珍迴圈—20、20、22與2、2、4！而質因數數列在相近解之反差計算中，比較不一樣的是又多了個袖珍迴圈。有嗎？茲取首項5，次項11，試算如下，5、11、16（4 4~8）、19、27（3 9~15）、34（2 17~15）、30（5 6~19）、34（2 17~15）、34（2 17~15）、30（5 6~19）、34（2 17~15）、34（2 17~15）、30（5 6~19）、34（2 17~15）、34（2 17~15）、…，以下同上，進入迴圈。由此可見一個三項迴圈—30、34、34。仔細瞧瞧！這三個袖珍迴圈的三個數之中，都有二數是彼此相同的。20、20、22迴圈與2、2、4迴圈都是較小數佔二項，較大數佔一項。30、34、34迴圈則反是，較小數佔一項，較大數佔二項。而且值得注意的是，這三個袖珍迴圈的數字全都是偶數呢！至於有沒有三個數都不一樣的袖珍迴圈呢？或是一偶數、二奇數所形成的袖珍迴圈呢？這個我便沒法子猜想了，還是拖延一下，以後再說吧！

吾人以相近解之反差推算質因數數列，有沒有數字黑洞呢？可能也有吧！茲取首項5，次項13，試算如下，5、13、18（3 6~9）、22（2 11~9）、18（3 6~9）、18（3 6~9）、18（3 6~9）、…，

以下同上，進入了18的數字黑洞。茲取首項16，次項16，試算如下，16(4 4~8)、16(4 4~8)、16(4 4~8)、16(4 4~8)、16(4 4~8)、…，以下同上，進入了 16 的數字黑洞。俺試過許多次，別的起始數對進不去16的數字黑洞喔！此外還有極其無聊的答案。不論相近解之反差推算或相遠解之反差推算，數字 4 的因數分解只有唯獨解，茲取首項 4 ，次項 4 ，試算看看囉！因為 0 是個數位數，不可做因數分解，於是便得到零鴨蛋迴圈了。亦即 4(2 2~0)、4(2 2~0)、0 、0 、0 、…，以下同上，很快進入了 0 的數字黑洞。

不過我看這個把戲也不是無限的。無論運用相遠解反差，或是相近解反差，用以推算質因數數列，吾人能運用的數字其實也很有限。恰如使用標準解反差時吾人遭遇的困境，只要起始數對的數字稍微大些，質因數數列的各項數字便會逐項飆升，迴圈的特性即告消失。而運算的數字愈大，吾人愈需要計算機幫忙。如果吾人要用電腦程式來幫助運算，怎麼辦呢？無論應用相遠解或相近解之質因數數列，反差計算只要把既有程式的尾段略作修改即可，茲將尾段之修改敘述如下。

如果前項等於前求和且前項不等於四，前求和換成零；結束。

如果後項等於後求和且後項不等於四，後求和換成零；結束。

如果前項小於等於一，前求和換成零；結束。

如果後項小於等於一，後求和換成零；結束。

註　印出前求和、後求和。

代項換成後項。後項換成前項減前求和、後項減後求和，兩差之和。

前項換成代項。印出後項。註　亦即新項。

姑且打個哈欠吧！希望列位看官別被冗長的數字、程式弄得瞌睡蟲都爬來了。歹勢啦！我並非什麼程式高手，以上程式還是相當粗糙，其實思路還不夠嚴謹，尚待改進。用電腦程式推算質因數數列固然是比較偷懶的辦法，不過這樣吾人還是可以藉此檢查筆算的結果對或不對？總而言之，因為質數不必做因數分解，保持原樣，而合數皆可以改寫成所屬質因數的冪次乘積，吾人便可試算某合數之雙因數分解，亦即各項各自做只含兩項的因數分解，並算出各數字之和，以此和代替原合數，然後前後項遞迴相加而產生新項的數列。無論吾人採用相近解、相遠解，無不以原合數之質因數分解—標準解為基礎；所以我想應該將這些數列歸於同一類，都算是質因數數列，只是玩法不太一樣而已。只要玩家挑選好要用相近解、相遠解，或是標準解，這些個質因數數列似乎都可以進入數字迴圈或數字黑洞囉！

暑假期間家人與我搭船，從貓鼻頭附近的小漁港後壁湖快樂的啓航，渡海到蘭嶼遊覽，兩天一夜感覺不錯唷！蘭嶼晚間幾乎沒有光害，星空格外璀璨，連銀河都可以看得很清楚。前年家人與我去綠島玩時，看到的星空也是如此美麗動人。不過綠島還多了個海水溫泉可以泡泡，目前蘭

嶼沒有看到什麼風呂，說不定以後還會發現吧！在我看來，綠島是座夢幻島，而蘭嶼是座神秘島，滿載了原住民的風情，可說是兩座島嶼各有特色。言歸正傳，家人與我客宿蘭嶼的當夜，風平浪靜，雖然時值盛暑，卻涼爽宜人。此地前臨大海，後臥小山，我坐在別館外面發呆、乘涼，癡癡的望向星夜與海空，既沒有往事，也沒有希望。此時此刻，來碗泡麵倒是不賴呀！蓋饕餮之歆，人皆有之；飲食床笫，嗜欲共存焉。可說是一時之間，福至心靈，靈機一動，我忽然想到把某合數的相近解、相遠解、標準解的各數字和全部加起來看看，可有什麼好玩的地方嗎？想想看吧！使我感到相當奇特的是在鐘錶上分秒必爭的進位制，數字60另有不一樣的特性，且看其各種因數分解，相遠解(2 30)，相近解(6 10)，標準解(2 2 3 5)，而2 + 30 = 32，6 + 10 = 16，2 + 2 + 3 + 5 = 12，然後32 + 16 + 12 = 60，哇喀街滴洞，回去自己囉！蓋此數由合而分，完事取和，鼎足而三，復歸一統，可真是有點玄哪！古代度日紀年的天干地支正是表示60進位喔！真的還假的啊？後來我想如果只計算相遠解、相近解之各數字和，不算標準解的答案，有沒有合數也會如此回歸本身數字呢？再找找看吧！……哦嘔，且看數字24，也好做做看因數分解，標準解(2 2 2 3)，相遠解(2 12)，適中解(3 8)，相近解(4 6)，而2 + 12 = 14，4 + 6 = 10，然後14 + 10 = 24，真的也可以回到自己呢！一個合數經過幾番因數分解，繼而加總其數字和，卻可以返本回原，看來又是一道數字趣味題罷了，怪不得一天是24小時啊！嗯…，看來數字也是會說話的，俺只好再接再厲，再度搜索其他數字，並且先分解、後求和，試算幾下子看看。後來吾人看到數字78也有此特性，拿來做各種因數分解，標準解(2 3 13)，相遠解(2 39)，適中解(3 26)，相近解(6 13)，而2 + 3 + 13 = 18，2 + 39 = 41，6 + 13 = 19，然後18 + 41 + 19 = 18 + 60 = 78，亦乃自己也乎！除了適中解的各數字和派不上用場外，此數也是標準解、相遠解、相近解─三種因數分解的各數字和，來個加總復原，等於原合數。可是數字78似乎並非人類用以計算日期、時間的進位數啊！遇上此等怪事，俺只好胡思亂想一通了。可能原因是它有哪些個質因數，蓋78可被13整除，78等於六個13，所以計時方法用上78的話，也無異於被13纏住，眾所皆知，西方人可是不太喜歡使用此數字呢！

在數論中除了談到質數謎團外，同時也有關於殆素數(almost prime)的理論，是說某合數在做質因數分解後，無論質因數之彼此異同，其乘積共包含幾個質因數的關係。所以我便有些疑問，某合數之級數是否可以對應到本身所屬質因數的個數與次方呢？我猜可以是可以的，但是要想法子去找哇！到底路徑何在呢？這個看似簡單的排列組合問題，因著平方數與立方數的混淆困擾，我想了很久很久才得出答案。因為某合數之質因數在雙因數分解時也可能被忽略不用，跳過了，所以某質因數之零次方，等於一也要算入。是以吾人只須把所屬質因數的次方數各自加一，然後全部相乘，因為乘法交換律，所得乘積應除以二，最後減一，即扣掉一項數字1與原合數本身的無聊因數分解，簡稱為無聊解，便是答案。例如999的質因數分解等於3．3．3．37，亦即3的立方乘以37的一次方，則3 + 1 = 4，1 + 1 = 2，而4、2相乘得8，除以2得4，4減1即得3。答案對不對呢？吾人逐級分解999，999 = 3．333 = 333．3，差距330；999 = 9．

111 ＝ 111 ‧ 9，差距 102；999 ＝ 27 ‧ 37 ＝ 37 ‧ 27，差距 10，所以 999 是個三級合數沒錯。但是原合數是個平方數的話，其級數的算法可是不太一樣了。例如225是15的平方，其質因數分解等於 3 ‧ 3 ‧ 5 ‧ 5，亦即 3 的平方乘以 5 的平方，則 2 ＋ 1 ＝ 3，2 ＋ 1 ＝ 3，而 3 、3 相乘得 9，9必須特加個 1 等於 10，除以 2 得 5，5 減 1 即得 4 。答案對不對呢？吾人逐級分解 225，225 ＝ 3 ‧ 75 ＝ 75 ‧ 3，差距 72；225 ＝ 5 ‧ 45 ＝ 45 ‧ 5，差距 40；225 ＝ 9 ‧ 25 ＝ 25 ‧ 9，差距 16；225 ＝ 15 ‧ 15，平方根無所差距，所以 225 是個四級合數沒錯。吾人試算具有較高質因數次方的數字看看，例如 729 是 27 的平方，亦為 9 的立方，其質因數分解等於 3 ‧ 3 ‧ 3 ‧ 3 ‧ 3 ‧ 3，即 3 的六次方，則 6 ＋ 1 ＝ 7，3 是唯一質因數，不用與其他質因數之次方數相乘，然而 7 必須特加個 1 等於 8，除以 2 得 4，4 減 1 即得 3 。答案對不對呢？吾人逐級分解 729，729 ＝ 3 ‧ 243 ＝ 243 ‧ 3，差距 240；729 ＝ 9 ‧ 81 ＝ 81 ‧ 9，差距 72；729 ＝ 27 ‧ 27，平方根無所差距，所以 729 是個三級合數沒錯。

以上敘述很是囉唆，吾人應設法使其公式化比較好些。設現有某合數 n，P1 、P2 、P3 、P4 、P5 為其所屬質因數，1 、2 、3 、4 、5 寫成下標，a 、b 、c 、d 、e 是正整數。而由質因數分解，已知合數 n 等於 P1 的 a 次方，乘以 P2 的 b 次方，乘以 P3 的 c 次方，乘以 P4 的 d 次方，乘以P5的 e 次方。設 c (n) 是其次方組合數。若 n 不是平方數，則級數等於 r (n) 。若 n 是平方數，則級數等於 s (n) 。經過簡單的公式推導，吾人亦可知兩倍 s（n）等於兩倍 r（n) 加一。亦即 r (n) 是整數時，s (n) 便不是整數。而 r（n）不是整數時，s（n) 纔能是整數。按此合數的級數公式可以表達如右。

$$\because n = P_1^{a} \times P_2^{b} \times P_3^{c} \times P_4^{d} \times P_5^{e}$$

$$c(n)=(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1)$$

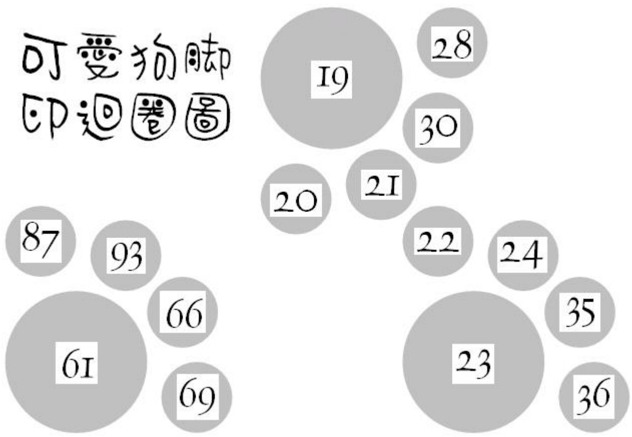
$$r(n)=c(n)\div 2-1$$

$$s(n)=(c(n)+1)\div 2-1$$

$$\therefore (s(n)+1)\times 2=(r(n)+1)\times 2+1$$

$$2s(n)=2r(n)+1$$

我想對列位看官來說，這幾道小公式一定不困難啦！不過按照美工的觀點來看，數字如果能與圖形融合，似乎更顯美妙喔！且待俺仔細想一想，無論標準解、相近解、相遠解，用以推算質因數數列，都會出現一個項數為五的數字迴圈，此乃巧合也乎？而且更巧的是，這三個五項迴圈當中都含有一個質數。本來我想使用五角形的星星形狀—☆，後來無意間看到一輛汽車上的狗腳印貼紙，似乎更適合表達這些五項迴圈呢！用可愛狗腳印表示的三個五項迴圈，如圖一。因為這些五項迴圈各自只有一個質數，便放在腳掌上；其餘四項是合數，便放在腳趾頭上。因為標準



圖一

解五項迴圈的數字與相近解五項迴圈的數字頗為接近，我便把這兩個五項迴圈靠近放在一起。由此可見 21 、 22 是最接近的兩個數字，此外標準解五項迴圈的 19 、 20 、 21 與相近解五項迴圈的 22 、 23 、 24 ，可以形成連續正整數。

相遠解五項迴圈的數字則稍微大一點。俺是覺得似乎不容易說出相遠解五項迴圈的數字，與相近解五項迴圈的數字、標準解五項迴圈的數字之間，究竟有什麼互相彼此的關係？看了許多日子，我只能說相遠解五項迴圈的數字，可以用相近解五項迴圈的數字、標準解五項迴圈的數字，相加出來。二數相加者如下：66 ＝ 30 ＋ 36 。

三數相加者如下：

66 ＝ 19 ＋ 23 ＋ 24 ＝ 20 ＋ 22 ＋ 24 ＝ 21 ＋ 22 ＋ 23 ，

69 ＝ 19 ＋ 20 ＋ 30 ＝ 19 ＋ 22 ＋ 28 ＝ 20 ＋ 21 ＋ 28 ＝ 22 ＋ 23 ＋ 24，

61 ＝ 19 ＋ 20 ＋ 22 ，

87 ＝ 21 ＋ 30 ＋ 36 ＝ 22 ＋ 30 ＋ 35 ＝ 23 ＋ 28 ＋ 36 ＝ 24 ＋ 28 ＋ 35，

93 ＝ 22 ＋ 35 ＋ 36 ＝ 28 ＋ 30 ＋ 35 。

在相遠解五項迴圈的數字裡，可以二數相減者如下：87 － 66 ＝ 21 ，93 － 69 ＝ 24 。其中21是標準解五項迴圈的數字， 24 則是相近解五項迴圈的數字。

在茶壺上常可看到的一句迴文是可、以、清、心、也，繞繞看吧！可以清心也，以清心也可，清心也可以，心也可以清，也可以清心，無論這五個字要從哪個字開始念起，都可以有意思的成句，真是巧妙哇！說到五這個數字，在哲學裡也有其特殊地位。據我所知，西方哲學的終極關懷是真、善、美三者。若以東方哲學來說，無論諸子百家或三教九流，所仰慕者不外乎聖、賢二者矣！而佛陀不也是聖者、賢者嗎？如果咱們來弄個珠聯璧合，便可得到真、善、美、聖、賢五個字，如此不但可以對應到古老的五大行星，而且也有點像迴文遊戲呀！其實聖美善真正是輔仁大學的校訓呢！我僅僅是把賢字也湊進去了。想太多囉！我看哲學也像數學一樣，發展的過程總是從無到有、由簡而繁的。古往今來，哲學與數學從來都是並駕齊驅、相輔相成的。世界每好言存在，萬事又寄乎萬物，恆以五行之機巧，皆不可失其常也。老子曰：「道可道，非常道；名可名，非常名。」而計天算地者，乃用以數可數，非常數乎？又以為形可形，非常形焉！友聲