



數學閒話——玩玩看乘法表幻方

文／圖·電工78級 田銘莒

曾幾何時，數獨成了一門顯學，受到大眾歡迎。無聊時，我也常想到一些數學遊戲。可不是嗎？數學從來都不是枯燥無趣的，數學可說是各種好玩的「玩術」集合。在各種數學遊戲中，幻方別有一番趣味，歷史久遠而且歷久不衰。幻方古名為縱橫圖，現代通稱為魔方陣。在一個正方形數陣中，其中各行、各列與兩對角線之各數字和均相等，即可成為和幻方。其中更有循環幻方者，乃因為折斷對角線之各數字和也是常數，顯得更加神妙，特稱為鬼方陣。按照幻方的發展史來看，古代的河洛文化，易經繫辭所謂的河出圖，還有洛出書，便是唯一的一種三階幻方，如圖一。

2	9	4
7	5	3
6	1	8

●●●●	●●●●	●●●●
●●●●	●●●●	●●●●
●●●●	●●●●	●●●●

四	九	二
三	五	七
八	一	六

圖一

而一般墊板或桌墊上也都印有九九乘法表。乘法表上的數字排列自然有其規則可循，乘法表其實也是一種數陣，數字表格如圖二。九個乘數在上面，九個被乘數在左側，共有81個乘積。後來我想，那麼九九乘法表上諸數字，是否可以重組，形成某種形式的幻方呢？亦即此一幻方不是用連續自然數，從1到81，而是用九九乘法表內乘得的81個數字。雖然這樣的數陣並不符合魔方陣的平常定義，反正奇技淫巧，玩物喪志而已，我想也無妨試玩它看看吧！（註）

想來想去，其實此等答案古已有之，還是這個古老的三階幻方給了我一些啓示。今有三階幻方，數字構造唯一，使之複有自身，兩者展倍而乘，即可得一九階數陣矣，如圖三。我想誰都可以很容易看出，此處的幻方常數等於225。蓋 $1 +$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

圖二

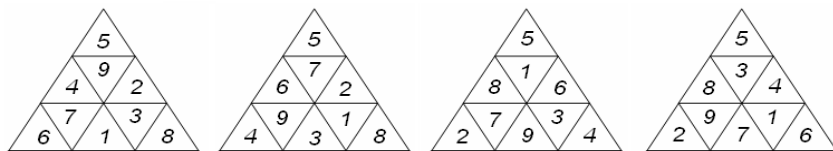
$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ ，而乘了1次、2次、3次、4次、5次、6次、7次、8次、9次，共45次。所以九九乘法表上所有乘積之和是45乘以45，亦即2025，取其九分之一等於225沒錯啦！

列位看官，時下數獨大行其道，正方形的數字表格，您玩膩了嗎？其實三角形魔陣也很好玩，只是數字加總的方向不太一樣而已。之前咱們模仿魔方陣來試玩三角形魔陣，可知三階三角形魔陣跟三階魔方陣一樣，都是由九個格子所組成的。其中每個小正三角形是一個格子，必須填入一個1到9的數字，不可重複。而三階三角形魔陣的數字條件是每個邊

16	36	8	36	81	18	8	18	4
12	20	28	27	45	63	6	10	14
32	4	24	72	9	54	16	2	12
12	27	6	20	45	10	28	63	14
9	15	21	15	25	35	21	35	49
24	3	18	40	5	30	56	7	42
32	72	16	4	9	2	24	54	12
24	40	56	3	5	7	18	30	42
64	8	48	8	1	6	48	6	36

圖三

或每個高上的三個格子，其數字和必須都是15。刪掉經過旋轉與翻轉可得到的相同構造，吾人可以找到下列四種三階三角形魔陣，如圖四。因為三角形魔陣可以簡稱為幻三角，而這四種三階三角形魔陣彼此外觀是很相似的。所以我想為了方便區別與稱呼，可以模仿觀星術語，圖四的答案由左至右，依序稱為冬季幻三角、春季幻三角、夏季幻三角、秋季幻三角，或是更簡短的冬三角、春三角、夏三角、秋三角。



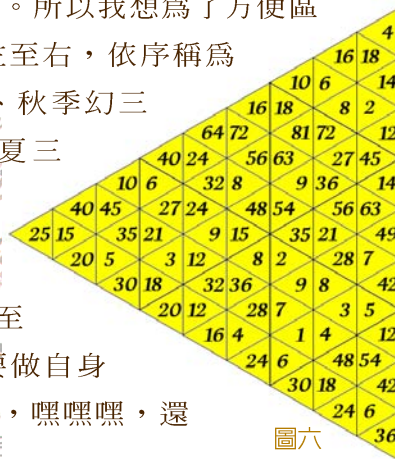
圖四



圖五

圖五的答案是夏季幻三角自身展乘而來。

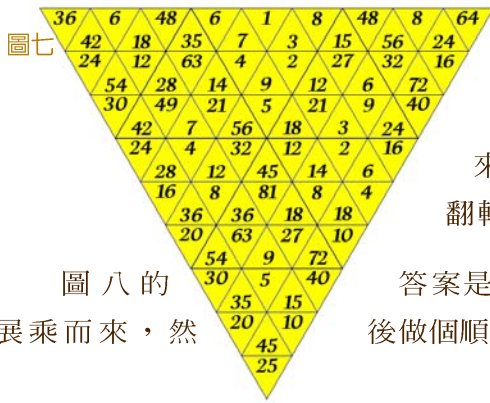
圖六的答案是秋季幻三角做個水平翻轉、逆時鐘90度旋轉，然後自身展乘而來。



圖六

接著吾人便可逐個使其自身展乘囉！至於此四季幻三角非要做自身展乘的原因嘛……，嘿嘿嘿，還是以後再說吧！

數學閒話 -- 玩玩看乘法表幻方

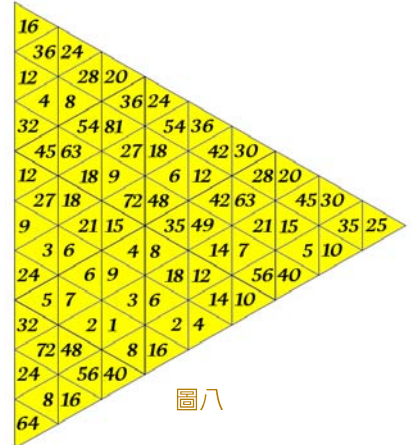


圖七

圖七的答案是冬季幻三角自身展乘而來，然後做個垂直翻轉。

圖八的展乘而來，然

答案是春季幻三角自身後做個順時鐘90度旋轉。



圖八

此時吾人若把圖三的答案，做個左右鏡射，便可獲得圖九的答案。

咦，為何簡單的九九乘法表要如此麻煩的把數字搬來搬去呢？哦嘔，為何三階魔方陣與四片三階三角形魔陣，要搞什麼自身展乘呢？

是爲了建築的應用呀！吾人今以圖九的答案爲底面，另以圖五的答案、圖六的答案、圖七的答案、圖八的答案爲四面斜坡，即可拼湊爲一座四角錐形式的金字塔了。此等答案銜接的技巧只是一句話，用同數相鄰法，此外，令我感到驚訝的是頂端四格之數字和正巧是壹佰呢！。

4	18	8	18	81	36	8	36	16
14	10	6	63	45	27	28	20	12
12	2	16	54	9	72	24	4	32
14	63	28	10	45	20	6	27	12
49	35	21	35	25	15	21	15	9
42	7	56	30	5	40	18	3	24
12	54	24	2	9	4	16	72	32
42	30	18	7	5	3	56	40	24
36	6	48	6	1	8	48	8	64

圖九

之前吾人使用一片魔方陣、四片三角形魔陣，便可構成魔術金字塔。以三角形魔陣組建金字塔時須注意，數字排列相同的兩個邊邊纔可互相銜接，亦即銜接處的數字必須與隔壁的格子數字相同。當然玩家有興趣的話，也可以用魔方陣與三角形魔陣，嘗試貼於其他幾何形體。在此限於篇幅，茲不贅述。

其實我的動機只是爲了好玩一下，拼一拼、湊一湊數與形罷了。數學遊戲嘛，玩玩是可以，可不能當真哪！余試述之，數可數，非常數；形可形，非常形。換言之，日常數不可複數，日常形不可圖形。蓋此亦宇宙造化之機也，存在之中，可算之乎？友聲

註：魔方陣的平常定義是玩家須在一個正方形表格內，運用連續自然數，其個數等於格子數，而欲達成的條件是使各行、各列與交叉對角線之各數字和均相等，即可產生幻方常數。