

數學閒話 - 玩玩看易數金字塔

文 / 圖：田銘莒

在浩瀚如海的中國文化裡，易經是代表性的典籍之一，奧秘實在深不可測。易經以簡單的陰陽符號，啟示天地造化之玄機，而且應變於無窮。易經繫辭是說，一陰一陽之謂道。其過程為太極生兩儀，兩儀陰調陽，兩儀生四象，曰太陰、少陰，曰少陽、太陽，如圖 1；四象生八卦，八卦即是天、澤、火、雷、風、水、山、地，如圖 2。眾所皆知，易經正文有八八六十四卦，是由上述八卦相重而成，意涵深奧，在此限於篇

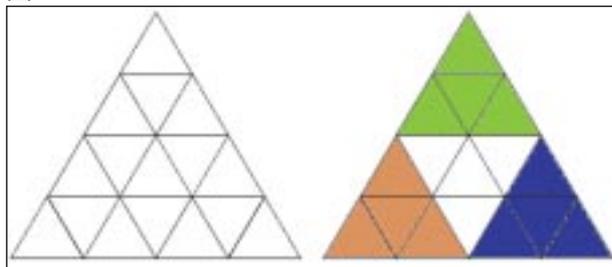
圖 1



圖 2



圖 3



幅，詳情我便不細說了。

咦？說到六十四，此數等於八的平方，可不也等於四的立方嗎？這樣不由得使我想起了正四面體，每片表面若是按 1、3、5、7 的橫數規律，分作十六格正三角形，則可以放置一片四階三角形魔陣，而十六格乘以四面，亦得六十四格，真是剛剛好哇！正四面體的全部表面正好都用上了。玩家可以令其尖端向上，空白四階三角形魔陣如圖 3 左邊所示。

為省略畫畫的麻煩，吾人今以數字 1 到 64 代表此六十四卦，設法分為四組，每組十六個數，各自組成四階三角形魔陣，是否可以得到某種正四面體形式之魔術金字塔呢？嗯嗯，此想法似乎值得玩家試玩看看喔！為行文便利起見，以下提到自然數 1 到 64，我簡稱為易數。

走筆至此，俺先得說說四階三角形魔陣是怎樣的數形構造呢？設玩家今有自然數 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16，四階三角形魔陣有三個邊、三個高，各有四個格子，其數字和須相等，如圖 4、圖 5 所示。四階三角形魔陣可等分成四塊四分之一正三角形，三塊在角落，一塊擺中間，各有四個格子，其數字和須相等，如圖 3 右邊所示。由以上可知玩家共使用四階三角形魔陣的十條規

則。

好了，規則已然知曉，那麼玩家該如何找到滿足上述三種數字和須相等條件的數字組合呢？啊，當然還是老套，模仿吧！偷懶的辦法便是玩家取法四階魔方陣的數字組合，變造一番並移入四階三角形魔陣。早已有十七世紀的數學家發揮刨根問底的精神，詳細拼過四階魔方陣的不同構造，全部高達 880 個之多，俺便取其中兩個試玩看看吧！如圖 6。列位看官細看便知，在圖 6 左邊的答案，玩家取其左下半部樓梯為改造基礎，可得圖 7 左邊的答案；至於圖 6 右邊的答案，玩家取其右上半部樓梯為改造基礎，可得圖 7 右邊的答案。是以在圖 7 的兩種答案中，按上述三個邊、三個高與四塊四分之一正三角形的位置關係，裡面四個格子之數字和都是 34。此處兩種答案都有十六個數字，玩家可運用等差級數公式，令首數、尾數相加得 17，乘以個數 16，除以 2，可得數字和為 136，除以 4，幻方常數便是 34 沒錯啦！此算式與梯形面積公式相似，玩家以上下底之和，乘以高，除以 2，即得其面積

圖 4

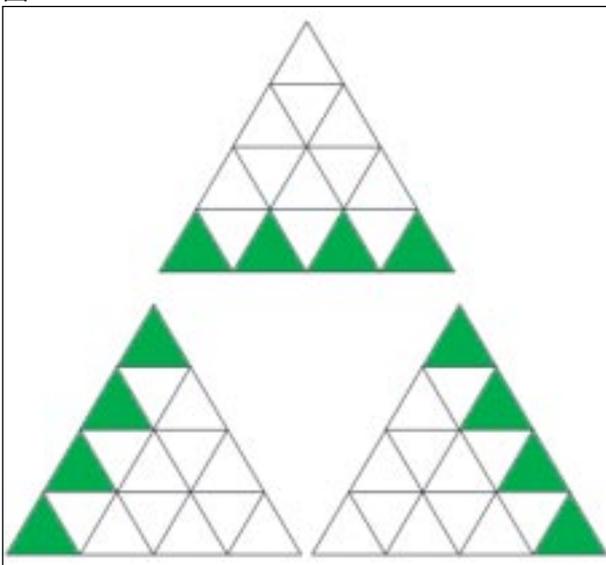


圖 5

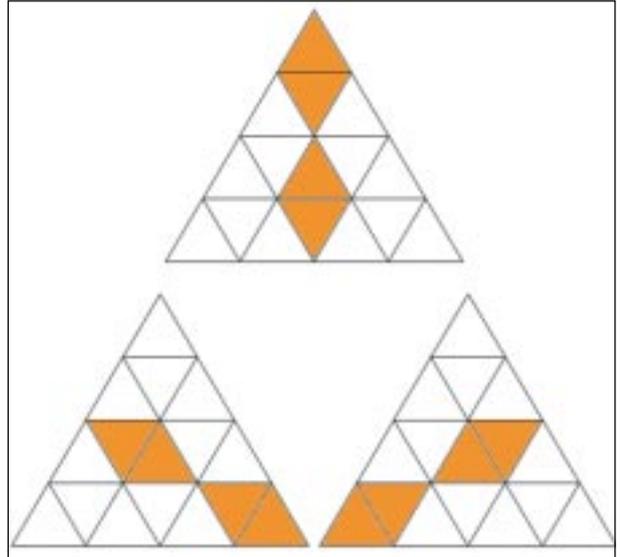
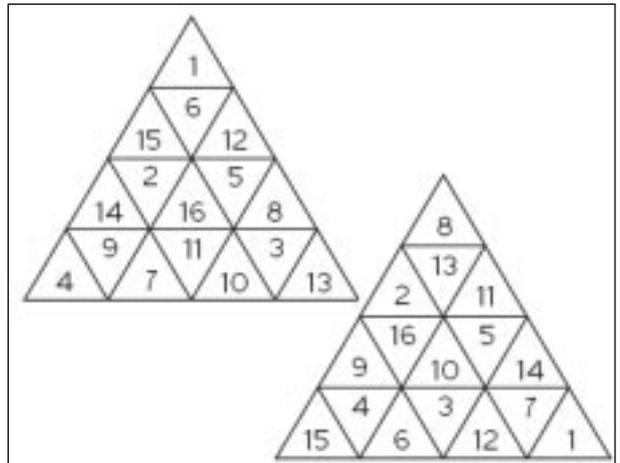


圖 6

1	6	11	16	8	11	14	1
15	12	5	2	13	2	7	12
14	9	8	3	3	16	9	6
4	7	10	13	10	5	4	15

圖 7



矣。其實此處我想計算的是幻三角魔術的相等和常數，然而幻三角可以從幻方改造而得，所以我還是稱為幻方常數，亦即幻三角常數。

以上是四階三角形魔陣的數字規則，那麼玩家想用四片四階三角形魔陣拼成正四面

體，總共六十四格，又該怎麼搭配1到64的自然數呢？想想看吧！數學遊戲嘛，我想也不要把它想得太難，輕鬆輕鬆就好。十九世紀的數學家高斯(原文Gauss，唸成ㄍㄠㄇㄨ)，人稱數學王子，年幼時便表現出不凡的數學才能，自己會算出等差數列求和。這個故事想必列位看官都知道，我倒是也由此獲得一些靈感，吾人何不交互取首尾、前後兩整數

而皆得相等和呢？玩家先有兩兩相等和，然後去湊幻方常數可就簡便多了，其中細節容我簡述如下。

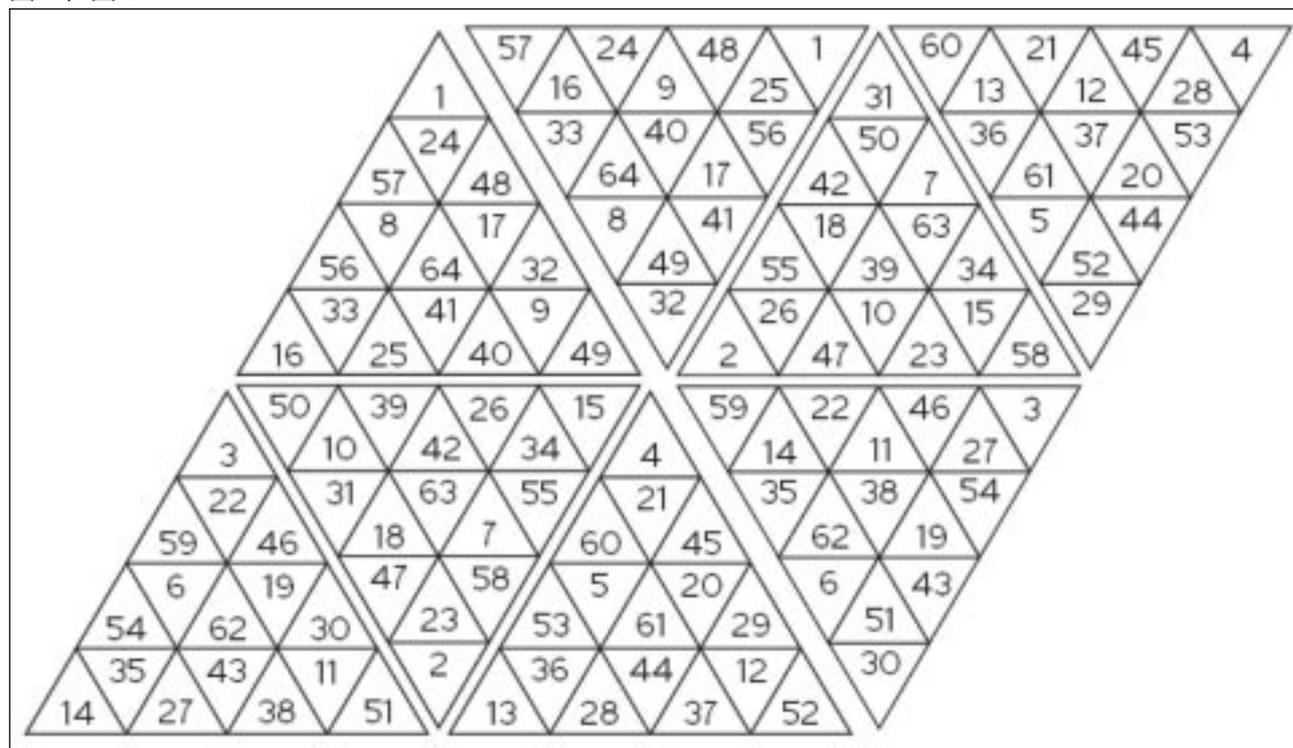
第一步是數字分組，吾人須將易數分為四組，每組各有十六個數字。俺倒是想到迴旋填數的辦法，應該是比較簡單些，如圖8。接著吾人算算看每組數字和，其中每對數字和都是65，共有8對，所以每組數字和都是65乘以8，等於520，我愛你？！第一組、第二組、第三組、第四組的全部數字和等於520乘以4，2080是也。

圖 8

迴旋式易數分組圖			
第一組	第二組	第三組	第四組
32 33	31 34	30 35	29 36
25 40	26 39	27 38	28 37
24 41	23 42	22 43	21 44
17 48	18 47	19 46	20 45
16 49	15 50	14 51	13 52
9 56	10 55	11 54	12 53
8 57	7 58	6 59	5 60
1 64	2 63	3 62	4 61

第二步是玩家把各組數字來個大搬風，以湊成四階三角形魔陣。我是想按圖7兩種答案之自然數順序，當作參照，並把各組的十六個數字，由小而大依序填入一片空白的四階三角形魔陣，正好是十六格，是為次序填數法。此處每組的十六個數字和是520，而每個邊、每個高、每塊四分之一正三角形都佔四格，亦即十六格的四分之一，則520

圖 9、圖 10



除以 4 是 130，便是幻方常數。

第三步是玩家組合四片表面，即四階三角形魔陣，以構成易數金字塔。玩家可把已填入數字的四階三角形魔陣都貼在此金字塔的四片表面上，而使易數在此正四面體的表面上無所遺漏。為了保持四片表面在空間中的關聯特性，在此步驟玩家不妨假設每面的中心數字，通過空間中心，達到對面尖端時也巧遇三面之三格數字，此四數字和也應當是 130。此構想經過我試驗，是可以做到的。

運用次序填數法，玩家以圖 7 左側答案為填入順序，可得答案如圖 9，另以圖 7 右側答案為填入順序，可得答案如圖 10，是兩種不同構造的易數金字塔。前面提到四階魔方陣的不同構造共有 880 個，如果玩家以四階魔方陣為造型指引，舉一反三，選用四個角落的數字樓梯為基礎，則每個四階魔方陣可以衍生的四階三角形魔陣便有 4 種，而 880 乘以 4，可得 3520。所以我猜玩家如果使用迴旋數組圖、次序填數法，可得到易數金字塔也有 3520 種之多。

玩家可以檢查檢查每面的中心數字，通過空間中心，達到對面尖端三面之三格數字，此四數字和也應當是幻方常數 130。

對於圖 9 的答案，驗算如下：

$$61 + 50 + 16 + 3 = 130$$

$$62 + 49 + 15 + 4 = 130$$

$$63 + 52 + 14 + 1 = 130$$

$$64 + 51 + 13 + 2 = 130$$

對於圖 10 的答案，驗算如下：

$$40 + 58 + 3 + 29 = 130$$

$$39 + 57 + 4 + 30 = 130$$

$$38 + 60 + 1 + 31 = 130$$

$$37 + 59 + 2 + 32 = 130$$

總之，所謂易數並非什麼神秘的怪數，易數即為 1 到 64 的自然數，用以代表易經各卦。如此玩家便可稱圖 9 的答案、圖 10 的答案，此等金字塔為易數金字塔了。

在圖 9 的答案、圖 10 的答案中，如果玩家把易數金字塔的每格數字改成二進位形式，並且以零為陰，以壹為陽，便相當於將六十四卦貼在正四面體的金字塔表面了。在談論易理的古籍中我也翻閱了幾本看看，是感到各種六十四卦的安排組成，不是方形，便是圓形。而在易數金字塔表面，玩家是把六十四卦重新安排組成四片牆壁，即四階三角形魔陣，進而邊對邊、頂點對頂點，黏成正四面體，而且還是立體的、空心的哦！不知易數金字塔可有什麼涵義呢？真要探究涵義的話，俺便要進到每一卦的意義裡去探尋，然而這差事可不是三言兩語可以打發得了的，我看還是學習西方哲學家先用懸擱存疑的方式，只要欣賞欣賞即可，不予討論吧！

在易數金字塔表面的每片四階三角形魔陣，每條邊、每個高與每塊四分之一正三角形，此間四數字和都是 130。我本來想說幻方常數 130 並沒有什麼特別的玄奧，只是個加出來的結果罷了。後來想想我纔發現這個數真有點名堂喔！稍微動筆算算，130 等於 9 加 121，亦即 3 的平方加上 11 的平方；而 130 也等於 49 加 81，亦即 7 的平方加上 9 的平方。所以此數是個可以用相異自然數平方

和表達的整數，而且乃是具有兩種方式之最小自然數。另外，11減掉3，得其差為8，而且7、9兩數的中數也是8，很巧吧！此外，幻方常數130可以用質因數分解為2乘以5，乘以13；其中13可以代表十三經，2則是陰、陽兩儀的意思，5則是水、金、火、木、土，五行的意思。我想總不能把13想成十三點或十三張吧？固然有些西洋人們不太喜歡碰見它，可是孫子兵法的古稱便是十三篇，我看此數似乎真有些神奇感喔！不過自己如此解析此數，免不了過度穿鑿附會了吧？呵呵呵，看官您可別當一回事啦！

簡言之，玩家以易數代表易經六十四卦，而以正四面體為載體，每片三角形表面均分為十六格三角形細胞，然後玩弄幻三角魔術，以堆砌成易數金字塔。易數金字塔本身並沒有什麼特別的道理可言，純粹好玩而已。

然而好玩歸好玩，我還是不得不回到易經本身的符號系統，亦即以八卦相重為六十四卦，我簡稱易卦。本文從頭開始，我一直在迴避一個問題，玩家怎樣可以使易卦一對一映射到易數呢？要是這種一對一映射做不出來，那麼玩家搞甚麼金字塔也可說是功虧

圖 11

下卦→ ↓上卦	天☰	澤☱	火☲	雷☳	風☴	水☵	山☶	地☷
天☰	乾☰	履☱	同人☲	無妄☲	姤☱	訟☱	遯☶	否☷
澤☱	夬☱	兌☱	革☱	隨☱	大過☱	困☱	咸☱	萃☱
火☲	大有☲	睽☱	離☲	噬嗑☲	鼎☲	未濟☲	旅☲	晉☲
雷☳	大壯☳	歸妹☱	豐☲	震☳	恒☲	解☲	小過☲	豫☱
風☴	小畜☴	中孚☴	家人☴	益☴	巽☴	渙☴	漸☴	觀☴
水☵	需☵	節☵	既濟☵	屯☵	井☵	坎☵	蹇☵	比☵
山☶	大畜☶	損☶	賁☶	頤☶	蠱☶	蒙☶	艮☶	剝☶
地☷	泰☱	臨☱	明夷☱	復☱	升☱	師☱	謙☱	坤☷

一簣，徒然做虛功了。

按照傳統形式，既然易卦都是兩兩重卦，其原始畫法是上卦畫在上邊，下卦畫在下邊，如此皆以兩卦相重，全部行列可以畫成上下重疊式的六十四卦方圖。不過易卦彼此會有太多線條疊在一起，我是覺得比較容易看走眼、看花了。所以此處俺不妨變通一下，兩兩重卦全部分成左右兩邊平放，如此比較一目瞭然。一般而言，大家提到兩兩重卦時，會先上後下，先說出上卦，後說出下卦。此處我便依照橫式書寫的習慣，即先左後右，以上卦放在左邊，用藍色表示；以下卦置於右邊，用紅色表示。希望如此列位看官可以更輕鬆的欣賞易卦之美。後來我想到按照一般顏色的聯想特性，以及左腦、右腦的功能區別，上卦在左邊似乎可看成是藍色的理性記號，下卦在右邊似乎可看成是紅色的非理性記號。在此非理性的意思不是誰的思想不要理性，亦非拒絕、排斥理性，而是毋須推理、毋庸置疑的意識，比理性的因果關係更直覺的慾性、更直觀的感性之類。然後我以下卦為橫軸，以上卦為直軸，便可畫出左右雙併式的六十四卦方圖，如圖11。在圖11的每個方格中，上卦在左下角，下卦在右下角，易卦名稱標於上方，並附注音符號。

到此為止，俺的老問題還是沒解決呢！玩家仍然未能使易卦一對一映射到易數，這是因為俺只顧到六十四卦，卻未曾深入到每個易卦的六爻。回顧數學史，易經可說是二進位算術的開山寶典。每個易卦各有六爻，一般來說，大家把陰爻當作零，把陽爻當作壹，陰爻、陽爻便是所有六十四卦的構成元

素。我看過有的書籍是把由上而下的六爻轉換作由右而左的二進位記號，相反，也有的書籍是轉換作由左而右的二進位記號，各不相同。此處我姑且按每個易卦的六爻由下而上，二進位記號由右而左的習慣，以計算每個易卦對二進位的轉換數。每個易卦一旦轉換成二進位數，玩家便可得到易卦與易數如何做一對一映射的答案。但是這時候問題又來了，玩家把全部易卦轉換成二進位數，再變成十進位數之結果是從0到63的整數，可是易數卻是從1到64的整數，而且乾卦變換成十進位數是63，坤卦變換成十進位數是0，而大家比較習慣的易卦順序卻是乾卦起頭，坤卦收尾。這個怪現象我也想了很久，後來我是想把每個易卦對二進位的轉換數先予確認，變換成十進位數時則分成兩種，亦即內在數與外在數，如此一來俺的思路便比較清楚了。運用整體補數法，玩家把每個易卦對二進位的轉換數先算出來，再變成十進位數，是為內在數(intrinsic number)。然後玩家用易卦的全部個數64減之，即得外在數(extrinsic number)。簡單講，內在數加上外在數，等於六十四卦總個數。於是我也以下卦為橫軸，以上卦為直軸，易卦行列如圖12所示。在圖12的每個方格中，易卦名稱擺在上方，轉換得到的二進位數放在中央，左下角是內在數，右下角是外在數，兩者都寫成十進位數，其和等於64沒錯。如此玩家纔可以說，總算使易卦一對一映射到易數了，哎唷蹂躪，很累吧！不過該面對的問題，玩家就是要用對方法，設法去解決，而不是一味的逃避現實，看官您說對不對呢？

有關易經卦義、傳記、道理、圖書、象數的諸多論述裡，抽象而奧妙的東西多得

圖 12

下卦→ ↓上卦	天 111	澤 011	火 101	雷 001	風 110	水 010	山 100	地 000
天 111	乾 111111 63···7	履 111011 59···5	同人 111101 61···3	無妄 111001 57···7	姤 111110 62···2	訟 111010 58···6	遯 111100 60···4	否 111000 56···8
澤 011	夬 011111 31··33	兌 011011 27··37	革 011101 29··35	隨 011001 25··39	大過 011110 30··34	困 011010 26··38	咸 011100 28··36	萃 011000 24··40
火 101	大有 101111 47··17	睽 101011 43··21	離 101101 45··19	噬嗑 101001 41··23	鼎 101110 46··18	未濟 101010 42··22	旅 101100 44··20	晉 101000 40··24
雷 001	大壯 001111 15··49	歸妹 001011 11··53	豐 001101 13··51	震 001001 9··55	恆 001110 14··50	解 001010 10··54	小過 001100 12··52	豫 001000 8··56
風 110	小畜 110111 55···9	中孚 110011 51··13	家人 110101 53··11	益 110001 49··15	巽 110110 54··10	渙 110010 50··14	漸 110100 52··12	觀 110000 48··16
水 010	需 010111 23··41	節 010011 19··45	既濟 010101 21··43	屯 010001 17··47	井 010110 22··42	坎 010010 18··46	蹇 010100 20··44	比 010000 16··48
山 100	大畜 100111 39··25	損 100011 35··29	賁 100101 37··27	頤 100001 33··31	蠱 100110 38··26	蒙 100010 34··30	艮 100100 36··28	剝 100000 32··32
地 000	泰 000111 7··57	臨 000011 3··61	明夷 000101 5··59	復 000001 1··63	升 000110 6··58	師 000010 2··62	謙 000100 4··60	坤 000000 0··64

是，可惜遲鈍的我，很少能看得懂、看得明白。超感謝列位看官有興致看到這兒，俺只好借用道德經的美言，自吹自唱幾句，聊以陶醉幾番囉！老子曰：「人法地，地法天，天法道，道法自然。」我想模仿成：「賢法聖，聖法美，美法善，善法真。」這幾句話並無什麼深刻的內容，只是聯珠法的應用而已。然而我想愛玩的玩家，自己要是能夠體現這樣的規律、協調與健康，纔能清歆寡欲，拱璧先于駟乘，然後乃可坐入此道，自由自在的優遊，無所羈絆、牽掛焉。友聲

作者簡介

田銘莒

電工 78 級，退伍後求學於中山大學電機工程研究所，曾致力探討注音翻譯法，並對數學產生濃厚興趣。曾服務於鋼鐵業及工研院，目前從事敬業樂群、誨人不倦的教育工作。