數學閒話—玩玩看最小公倍數

文：田銘莒

現在大家看到的數學，因為符號系統已經完全西化，講起代數、幾何、微積分、機率論、博弈論等等，感覺上都是西方文化的產物。其實古代中國已有相當高超的數學成就，只是在考科舉、求功名的時代趨勢下，不太引人注目而已。相較於西方名著之側重推理過程，例如幾何原本的條分縷析，古代中國算書多以解決應用問題為主，九章算經、孫子算經便搜羅了許多實際問題與解答，值得細細推敲。

我也模仿古人來一題吧！今有夫妻相約泡湯，初一不可之，夫欲妻每二日一之，妻欲夫每三日一之，試問每幾日夫妻皆欲之？

每二日者，可取初二、初四、初六、初八、……，依此類推。

每三日者，可取初三、初六、初九、……，依此類推。

由此可知，每六日夫妻皆欲之。

初等數學課程裏，內容總會提到因數與倍數，以及最大公因數、最小公倍數。這些觀念相信列位看官都明白，容我簡述如下。

最大公因數是兩相異自然數各有其因數，其中若有共同因數，宜取其最大者。以上是說明兩相異自然數，至於兩相同自然數，如此更是簡單，本身便是本身的因數，則其最大公因數等於此同數。

最小公倍數意謂，兩相異自然數必有一個較小數與一個較大數，存在某自然數，使此自然數既是較小數之倍數，也是較大數之倍數，宜求其最小者。以上是說明兩相異自然數，至於兩相同自然數，如此更是簡單，本身便是本身的倍數，則其最小公倍數等於此同數。此外，如果兩相異自然數互質，亦即沒有大於一的公因數，則存在某自然數，等於兩相異自然數之乘積，適為其最小公倍數。

從數學史來看，某時代的數學發展，確實與當時人們身處的自然環境、社會狀況脫不了關係。著名的兔寶寶數列便是玩家計算兔崽子有幾隻而來的。我想兔寶寶數列還是比較單純，以前後項加個不停，玩家從起始數對1、1，開始計算各項，亦即1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、89、144、233、377、610、987、……等等。然而兔寶寶數列的數字像滾雪球一樣，逐項成長，愈滾愈大，無所限制，無盡無窮。我想是不是有什麼方法可以把數字縮掉一些些，甚至造成一圈又一圈類似波浪的循環呢？我後來想到的簡單方法是把合數做質因數分解，然後以其所得各數字求和，以代替原數。

以下為行文便利，我簡稱合數的質因數分解為標準解。例如100可以拆成66、34二數。茲取首項66，次項34，試算如下。66(2 3 11)16、34(2 17)19、35(5 7)12、31、43、74(2 37)39、82(2 41)43、82(2 41)43、

86(2 43)45、 88(2 2 2 11)17、 62(2 31)33、 50(2 5 5)12、45(3 3 5)11、23、34(2 17)19、 42(2 3 7)12、31、43、74(2 37)39、82(2 41) 43、 82(2 41)43、 86(2 43)45、 88(2 2 2 11) 17、62(2 31)33、50(2 5 5)12、45(3 3 5)11、 23、 34(2 17)19、 42(2 3 7)12、……，以下同上，進入迴圈。由此可見此數字迴圈之環節長達十三項，31、43、74、82、82、86、88、62、50、45、23、34、42，而且其中包含23、31、43三個質數。使我感到有趣的是，這三個質數和也是個質數，97是也。

簡單說，玩家計算此等數列，也是靠前後項相加，每逢合數，取其質因數分解之各數字和；每逢質數便保持原樣，如此反復計算新項，看看能不能進入數字黑洞或迴圈呢？如此改造的新型數列，我稱為質因數數列。

所以，質因數數列是由兔寶寶數列改造而來，對於其中的合數，依照算術基本定理，做質因數分解，以其質因數各數字和代替原數，對於質數則保持原樣。如果不以加法為限，玩家對前後項也可以使用減法，或是乘法或除法，便可得出新項。後來我想質因數數列的前後項運算，除了四則運算，還有沒有其他變通方式，可以使前後項互相作用而產生新項呢？想想看吧！

一開始玩家在前後項的運算是學習兔寶寶數列，使用加法，當然啦！既然有四則運算並行不悖，倒也是舉一反三了。我後來想說，不知道是否可以運用最小公倍數為前後項之運算呢？似乎值得一試哩！

如果玩家計算質因數數列時，更改前後項之運算為求其標準解各數字和之最小公倍數，那結果又如何呢？我想最小公倍數的運算顯然要比加、減、乘、除更複雜些，好家在玩家可以請電腦程式幫幫忙。好啦！囉哩囉唆的程式如下：

給入前項，給入後項。印出前項、後項。

按質數表依序讀入各質數成陣列。

始迴圈，一到全部質數項數，註　印出質數陣列各項，終。

始迴圈，一到全部計算項數，

前求和等於零。後求和等於零。印出下一行。

始迴圈，一到幾個質數，

始迴圈，一到質數多少次方，

如果前項除以質數陣列此項次方之四捨五入等於前項除以質數陣列此項次方，

則前求和換成前求和加質數陣列此項，

註　印出質數陣列此項，

結束。

如果前項小於質數陣列此項次方，則中斷，結束。

終。終。

始迴圈，一到幾個質數，

始迴圈，一到質數多少次方，

如果後項除以質數陣列此項次方之四捨五入等於後項除以質數陣列此項次方，

則後求和換成後求和加質數陣列此項，

註　印出質數陣列此項，

結束。

如果後項小於質數陣列此項次方，則中斷，結束。

終。終。

註　印出前求和、後求和。

註　前項、後項為零或一，不做分解。

如果前項小於等於一，則前求和等於前項，結束。

如果後項小於等於一，則後求和等於後項，結束。

前項換成後項。後項換成前求和、後求和之最小公倍數。印出後項。註　亦即新項。

終。

吾人以標準解算質因數數列，前後項取最小公倍數，茲取首項 2，次項 5，試算如下。2、5、10(2 5)7、35(5 7)12、84(2 2 3 7)14、84(2 2 3 7)14、14(2 7)9、126(2 3 3 7)15、45(3 3 5)11、165(3 5 11)19、209(11 19)30、570(2 3 5 19)29、870(2 3 5 29)39、1131(3 13 29)45、585(3 3 5 13)24、360(2 2 2 3 3 5)17、408(2 2 2 3 17)26、442(2 13 17) 32、416(2 2 2 2 2 13)23、736(2 2 2 2 2 23) 33、759(3 11 23)37、1221(3 11 37)51、1887 (3 17 37)57、969(3 17 19)39、741(3 13 19) 35、1365(3 5 7 13)28、140(2 2 5 7)16、112 (2 2 2 2 7)15、240(2 2 2 2 3 5)16、240(2 2 2 2 3 5)16、16(2 2 2 2)8、16(2 2 2 2)8、8(2 2 2)6、24(2 2 2 3)9、18(2 3 3)8、72(2 2 2 3 3)12、24(2 2 2 3)9、36(2 2 3 3)10、90(2 3 3 5)13、130(2 5 13)20、260(2 2 5 13)22、220(2 2 5 11)20、220(2 2 5 11)20、20(2 2 5) 9、180(2 2 3 3 5)15、45_11、165_19、209_30、570_29、870_39、1131_45、585_24、360_17、408_26、442_32、416_23、736_33、759_37、1221_51、1887_57、969_39、741_35、1365_28、140_16、112_15、240_16、240_16、16_8、16_8、8_6、24_9、18_8、72_12、24_9、36_10、90_13、130_20、260_22、220_20、220_20、20_9、180_15、……，以下同上，進入迴圈。以上我是用底線記號代替重複出現的質因數分解各數字。由此可見一個較長迴圈，即45、165、209、570、870、1131、585、360、408、442、416、736、759、1221、1887、969、741、1365、140、112、240、240、16、16、8、24、18、72、24、36、90、130、260、220、220、20、180，共三十七項。因為新項的產生是靠前後項的最小公倍數算得，所以在此迴圈中各項都不是質數。我觀察此迴圈中各數，竟有四對是同數，即16、24、220、240，各出現兩次。而三十七項中高達十三項是十的倍數。值得注意的是，16＋24＋220＋240＝500，而兩倍便是1000了。

然後俺興致勃勃的想對合數改用雙因數分解，以其相遠解、相近解去算質因數數列，看看結果有什麼不一樣，怎知道也是有數列產生，不過數字都是逐項愈來愈大，絕大部分都發散失去，沒有一點兒迴圈的影子，算了只好作罷。除非首項與次項是同數，然後質因數數列便進入此同數的數字黑洞了。吾人改以相遠解算質因數數列，前後項取最小公倍數，茲取首項3，次項14，試

算如下，3、14(2 7)9、9(3 3)6、18(2 9)11、66(2 33)35、385(5 77)82、2870(2 1435)1437、117834(2 58917)58919、……，各項漸增，沒有迴圈。

吾人改以相近解算質因數數列，前後項取最小公倍數，茲取首項2，次項13，試算如下，2、13、26(2 13)15、195(13 15)28、420(20 21)41、1148(28 41)69、2829(41 69)110、7590(69 110)179、19690(110 179)289、51731(179 289)468、135252(289 468)757、……，各項漸增，沒有迴圈。然而也有例外，茲取首項3，次項14，試算如下，3、14(2 7)9、9(3 3)6、18(3 6)9、18(3 6)9、9(3 3)6、18(3 6)9、18(3 6)9、9(3 3)6、18(3 6)9、18(3 6)9、……，以下同上，進入迴圈。此即9、18、18的三項迴圈，只適用於以相近解算質因數數列。

玩家寫程式時，使用套裝軟體的函式是比較方便省事些，既然找到質因數分解的方法，懶惰的我便好套用進去，更新版的簡易程式如下。

給入前項。給入後項。印出前項、後項。

始迴圈，一到全部計算項數，

前求和等於零，前陣列為前項之質因數分解各數列。

後求和等於零，後陣列為後項之質因數分解各數列。

印出下一行。

始迴圈，一到前陣列之長度，

前求和換成，前求和加前陣列各項。

印出前陣列各項。終。

始迴圈，一到後陣列之長度，

後求和換成，後求和加後陣列各項。

印出後陣列各項。終。

註　印出前求和、後求和。

前項改成後項。後項改成前求和、後求和之最小公倍數。印出後項。註 亦即新項。

終。

如此玩家便使程式篇幅縮小不少，而且減少一層迴圈，執行速度好歹也是快多了！

至於最大公因數，我想也可以用用看嗎？想當然吧！吾人以標準解算質因數數列，前後項取最大公因數，茲取首項3，次項10，試算如下，3、10(2 5)7、1、1、1、……，以下皆同。茲取首項2，次項15，試算如下，2、15(3 5)8、2、2、2、……，以下皆同。吾人以相遠解算質因數數列，前後項取最大公因數，茲取首項24，次項10，試算如下，24(2 12)14、10(2 5)7、7、7、7、……，以下皆同。吾人以相近解算質因數數列，前後項取最大公因數，茲取首項24，次項25，試算如下，24(4 6)10、25(5 5)10、10、10、10、……，以下皆同。噢嘔！這在幹什麼呢？一堆數字不是都一樣了嗎？我看還是省省吧！所以前後項取最大公因數，質因數數列就很容易進了數字黑洞，真是些挺無聊的數列。然而如此無聊的數列怎樣能變得更有趣一點呢？

數學遊戲嘛，總是得變變花樣，纔能像個樣。後來我想每次運算，玩家只運算前後兩項，未免太單調了。要是玩家同時運算三

項、四項，甚至更多項，如此一來，豈不是更好玩嗎？也許玩家會因此得到更複雜的質因數數列呢！在程式反復運算時，每次第一項、第二項、第三項，我在此簡稱為前項、次項、後項。玩家以標準解算質因數數列，以連續三項取最小公倍數，簡易程式如下。

給入前項。給入次項。給入後項。印出前項、次項、後項。

始迴圈，一到全部計算項數，

前求和等於零，前陣列為前項之質因數分解各數列。

次求和等於零，次陣列為次項之質因數分解各數列。

後求和等於零，後陣列為後項之質因數分解各數列。

印出下一行。

始迴圈，一到前陣列之長度，

前求和換成，前求和加前陣列各項。

印出前陣列各項。終。

始迴圈，一到次陣列之長度，

次求和換成，次求和加次陣列各項。

印出次陣列各項。終。

始迴圈，一到後陣列之長度，

後求和換成，後求和加後陣列各項。

印出後陣列各項。終。

註　印出前求和、次求和、後求和。

前項改成次項。次項改成後項。後項改成前求和、次求和之最小公倍數，與後求和之最小公倍數。印出後項。註　亦即新項。

終。

茲取首項3、次項5、尾項7，試算如下。3、5、7、105(3 5 7)15、105(3 5 7)15、105(3 5 7)15、15(3 5)8、120(2 2 2 3 5)14、840(2 2 2 3 5 7)21、168(2 2 2 3 7)16、336(2 2 2 2 3 7)18、1008(2 2 2 2 3 3 7)21、1008(2 2 2 2 3 3 7)21、126(2 3 3 7)15、105(3 5 7)15、105(3 5 7)15、15(3 5)8、120(2 2 2 3 5)14、840(2 2 2 3 5 7)21、168(2 2 2 3 7)16、336(2 2 2 2 3 7)18、1008(2 2 2 2 3 3 7)21、1008(2 2 2 2 3 3 7)21、126(2 3 3 7)15、……，以下同上，進入迴圈。由此可見一個十項迴圈，即105、105、15、120、840、168、336、1008、1008、126。

茲取首項2、次項5、尾項7，試算如下。2、5、7、70(2 5 7)14、70(2 5 7)14、14(2 7)9、126(2 3 3 7)15、630(2 3 3 5 7)20、180(2 2 3 3 5)15、60(2 2 3 5)12、60(2 2 3 5)12、60(2 2 3 5)12、12(2 2 3)7、84(2 2 3 7)14、84(2 2 3 7)14、14(2 7)9、126(2 3 3 7)15、630(2 3 3 5 7)20、180(2 2 3 3 5)15、60(2 2 3 5)12、60(2 2 3 5)12、60(2 2 3 5)12、12(2 2 3)7、84(2 2 3 7)14、84(2 2 3 7)14、……，以下同上，進入迴圈。由此可見一個十項迴圈，即14、126、630、180、60、60、60、12、84、84。

茲取首項99、次項5、尾項7，試算如下。99(3 3 11)17、5、7、595(5 7 17)29、1015(5 7 29)41、8323(7 29 41)77、91553(7 11 29 41)88、25256(2 2 2 7 11 41)65、40040(2 2 2 5 7 11 13)42、120120(2 2 2 3 5 7 11 13)45、8190(2 3 3 5 7 13)33、6930(2 3 3 5 7 11)31、15345(3 3 5 11 31)53、54219(3 11 31 53)

98、161014(2 7 7 31 53)100、259700(2 2 5 5 7 7 53)81、396900(2 2 3 3 3 3 5 5 7 7)40、16200(2 2 2 3 3 3 3 5 5)28、22680(2 2 2 3 3 3 3 5 7)30、840(2 2 2 3 5 7)21、420(2 2 3 5 7) 19、3990(2 3 5 7 19)36、4788(2 2 3 3 7 19) 36、684(2 2 3 3 19)29、1044(2 2 3 3 29)39、13572(2 2 3 3 13 29)52、4524(2 2 3 13 29) 49、7644(2 2 3 7 7 13)34、43316(2 2 7 7 13 17)48、39984(2 2 2 2 3 7 7 17)42、5712(2 2 2 2 3 7 17)35、1680(2 2 2 2 3 5 7)23、4830(2 3 5 7 23)40、6440(2 2 2 5 7 23)41、37720(2 2 2 5 23 41)75、24600(2 2 2 3 5 5 41)60、12300(2 2 3 5 5 41)58、8700(2 2 3 5 5 29)46、40020(2 2 3 5 23 29)64、42688(2 2 2 2 2 2 23 29)64、1472(2 2 2 2 2 2 23)35、2240(2 2 2 2 2 2 5 7)24、6720(2 2 2 2 2 2 3 5 7)27、7560 (2 2 2 3 3 3 5 7)27、216(2 2 2 3 3 3)15、135 (3 3 3 5)14、1890(2 3 3 3 5 7)23、4830(2 3 5 7 23)40、6440(2 2 2 5 7 23)41、37720(2 2 2 5 23 41)75、24600(2 2 2 3 5 5 41)60、12300 (2 2 3 5 5 41)58、8700(2 2 3 5 5 29)46、40020 (2 2 3 5 23 29)64、42688(2 2 2 2 2 2 23 29) 64、1472(2 2 2 2 2 2 23)35、2240(2 2 2 2 2 2 5 7)24、6720(2 2 2 2 2 2 3 5 7)27、7560(2 2 2 3 3 3 5 7)27、216(2 2 2 3 3 3)15、135(3 3 3 5)14、1890(2 3 3 3 5 7)23、……，以下同上，進入迴圈。由此可見一個較長迴圈，共十五項，即4830、6440、37720、24600、12300、8700、40020、42688、1472、2240、6720、7560、216、135、1890。

更進一步說，玩家亦可使前後連續四項一起運算，以產生新項。茲取首項3、次項5、參項7、尾項1，試算如下。3、5、7、1、105(3 5 7)15、105_15、105_15、15(3 5)8、120(2 2 2 3 5)14、840(2 2 2 3 5 7)21、840_21、168(2 2 2 3 7)16、336(2 2 2 2 3 7) 18、1008(2 2 2 2 3 3 7)21、1008_21、1008_21、126(2 3 3 7)15、105(3 5 7)15、105_15、105_15、15(3 5)8、120(2 2 2 3 5) 14、840(2 2 2 3 5 7)21、840_21、168(2 2 2 3 7)16、336(2 2 2 2 3 7)18、1008(2 2 2 2 3 3 7)21、1008_21、1008_21、126(2 3 3 7) 15、……，以下同上，進入迴圈。茲取首項7、次項5、參項3、尾項1，試算如下。7、5、3、1、105(3 5 7)15、15(3 5)8、120(2 2 2 3 5)14、840(2 2 2 3 5 7)21、840_21、168(2 2 2 3 7)16、336(2 2 2 2 3 7)18、1008 (2 2 2 2 3 3 7)21、1008_21、1008_21、126 (2 3 3 7)15、105(3 5 7)15、105_15、105_15、15(3 5)8、120(2 2 2 3 5)14、840 (2 2 2 3 5 7)21、840_21、168(2 2 2 3 7)16、336(2 2 2 2 3 7)18、1008(2 2 2 2 3 3 7)21、1008_21、1008_21、126(2 3 3 7)15、105(3 5 7)15、105_15、105_15、……，以下同上，進入迴圈。由此可見一個較長迴圈，即15、120、840、840、168、336、1008、1008、1008、126、105、105、105，共十三項。

我本來想說以最小公倍數進行質因數數列的前後項運算，如果同時運算連續更多項，玩家應該會得到更複雜的數列，就以上的結果來看，俺真是徹底猜錯了！凡事都要驗證，不然俺還不是亂猜一通。

總而言之，玩家可以更改質因數數列的前後項運算方式，本來可應用四則運算遞推，亦可使用最大公因數或最小公倍數遞推，設法產生數字迴圈。此外，吾人以數論

的觀點來看，任何整數乘以零，都等於零。所以零是任何整數的倍數，對於兩相異自然數或兩相同自然數，零都是公倍數，我稱為無聊公倍數。玩家從無聊公倍數開始，找到下一個公倍數，便是最小公倍數。對於兩相同自然數來說，最小公倍數便是一模一樣的此同數。至於兩相異自然數，就哲學家的觀點來看，兩者之最小公倍數，代表兩者之協調與平衡，例如三個5等於五個3，三個8等於兩個12，四個25等於十個10，好像玩家擺弄壁磚似的，正好可以拼成一片正方形。

請列位看官回到起頭的問題，容我更改題意為，今有夫妻相約泡湯，初一不可之，夫欲妻暨妻欲夫，皆以每同數日一之，試問每幾日夫妻皆欲之？

同數為二日者，可取初二、初四、初六、初八、……，依此類推。

同數為三日者，可取初三、初六、初九、……，依此類推。

顯然，此答案便是每同數日夫妻皆欲之。無論夫妻每二日一之或每三日一之，總是優於每六日一之。

由此可知，夫妻皆欲每同數日一之，因此同數不大於其公倍數，是故發生頻率當較兩人互欲非同數日為高，對不對？如其波浪乎！

順便提到，其實六合此詞，在古文的意思便是前、後、左、右、上、下，意指空間整體，無分軒輊，此觀念正好相當於幾何之正六面體。我倒是把它曲解了，逢六必合，不多不少，夫妻每六日則一之！

不過以數論而言，六的確是第一個完全數。完全數意謂某合數所有真因數之和，等於原數。例如6的因數是1、2、3、6，其中6本身只是個假因數，不算。而1、2、3是真因數，而此三數和正好是6呢！六也有豐滿、豐盛的意思。農家許願稱六畜興旺，商家更想得六六大順。看官您別忘了，就連賭博用的骰子也是六點最大呢！哎唷，真是扯遠了。

話說從前，在數學的小天地裡，可謂多采多姿，鮮花到處綻放與競豔。此數還有個更明顯的展演，是在六個三角函數，即正弦(sin)、餘弦(cos)、正切(tan)、餘切(cot)、正割(sec)、餘割(csc)。而三角函數的公式美，實在不亞於電磁場方程式之美，頗令人有沉魚落雁、閉月羞花之感動。限於篇幅，此處我便不多說了，到底是怎麼個美法，還請列位看官自行翻書瞧瞧囉！

按照萬物皆數的數學史觀，湯也是數嘛！改天我跟愛妻泡湯時，俺得在風呂、烤箱裏找找看是啥樣子的數，好玩嗎？友聲

作 者 簡 介

田銘莒

電工 78 級，退伍後求學於中山大學電機工程研究所，曾致力探討注音翻譯法，並對數學產生濃厚興趣。曾服務於鋼鐵業及工研院，目前從事敬業樂群、誨人不倦的教育工作。