

數學閒話 玩玩看骰子立方體

文 / 圖：田銘莒

從古到今，賭博是個歷久不衰、毀譽相參的熱門話題，也是全世界許多人樂此不疲的嗜好與消遣。賭博基本上與各種棋類遊戲一樣，是一種具有數學意義的戰爭遊戲，只是附帶投機性、冒險性更大些而已。不過看來看去，常見的賭博把戲也就是那麼幾種，大眾會比賽紙牌、轉輪盤、拚骨牌、搓麻將等等，不然就是玩玩吃角子老虎、水果盤也不錯，然而我想擲骰子還是當中最簡便的戲法。玩家想賭一把過癮的話，必須先學會如何操弄賭博用具，而骰子擲在碗盅裡的響聲可是十分清脆悅耳，所以我想不妨從骰子開始玩吧！

骰子以其投擲方式與點數塗色，又名投子或色子。請大家先來看看骰子的構造吧！以美學觀點來看，對稱是不可或缺的元素。所以，骰子也講求對稱的美感。對稱之道在於，一點的反面是六點，二點的反面是五點，三點的反面是四點，反之亦然，即相對兩面之點數和必是七， $7 - 3$ 為 21，整體點數和是 21。如果玩家通盤考慮各點的相對位置，則可先把一點、六點的位置確定，然後把二點、五點的位置確定，自轉一圈而已，並無困難。至於三點、四點的位置，便有歧異出現了。

以斜視圖來仔細察看，玩家不難發現骰子的各點位置，可以利用時針的走向來判

斷。

如果一點、二點、三點以逆時針序向圍繞頂點，則一點、二點、四點便以順時針序向圍繞頂點。與此相反，如果一點、二點、三點改以順時針序向圍繞頂點，則一點、二點、四點便以逆時針序向圍繞頂點。

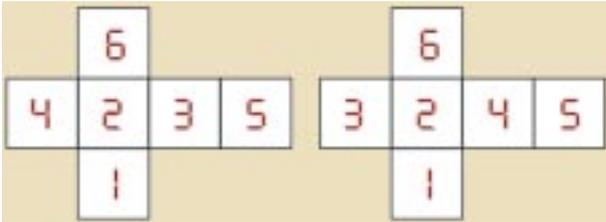
如果四點、五點、六點以逆時針序向圍繞頂點，則三點、五點、六點便以順時針序向圍繞頂點。與此相反，如果四點、五點、六點改以順時針序向圍繞頂點，則三點、五點、六點便以逆時針序向圍繞頂點。

我想另外一種等價的表述方式，或許可以用奇數、偶數為之區別。

如果一點、三點、五點以逆時針序向圍繞頂點，則二點、四點、六點也以逆時針序向圍繞頂點。與此相反，如果一點、三點、五點改以順時針序向圍繞頂點，則二點、四點、六點也以順時針序向圍繞頂點。

為了簡化作圖的繁瑣，以下我以數字直接代替各表面點數。為了區別方便起見，在此我模仿電磁學的定則術語，這兩種相似構造的骰子，前者我稱為右手形式，後者我稱為左手形式，兩者互為左右鏡射，平面展示圖如圖 1。左邊的答案是左手形式，右邊的答案是右手形式。為簡化討論起見，以下的各種玩法，我都使用右手形式的骰子，至於

圖 1

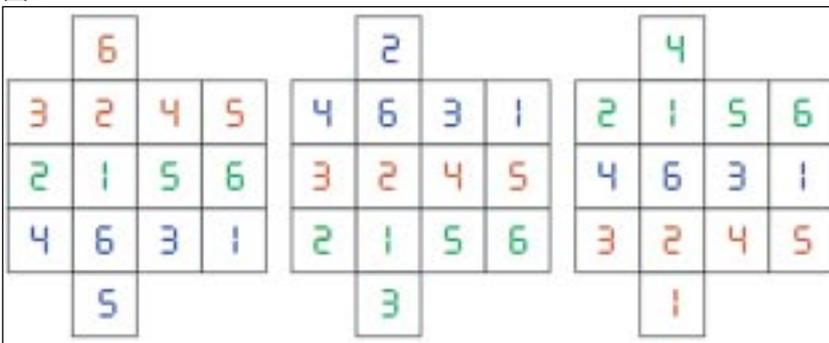


左手形式的骰子又該怎麼個玩法呢？這倒也不困難，玩家只須把三點與四點、二點與五點、一點與六點，三種平行擇其一種做數字調換，便是左手形式的骰子玩法，或是將整個圖形做個左右鏡射即可。

無論各種賣場、書局、文具行、雜貨店，從一般市面販售所看到的骰子，我發現了有趣的現象，即硬塑膠骰子都是右手形式，而海綿布骰子都是左手形式，不知道為甚麼是如此區別啊？

玩家想玩賭博，只要一顆骰子便可以，或者是兩顆、三顆骰子一起擲，數字變化更大。某日我無聊時拿起三顆骰子，疊在一塊兒，看來像條站立的切片麵包。由此可以看到，每層環繞四面的各數字和必是14。噢嗑嘔，真是一堆廢話！以骰子本身的構造來看，四點的反面是三點，五點的反面是二點，六點的反面是一點，反之亦然；是以，相對兩面之數字和必是七。儘管玩家沒有規律的隨便擺弄這三顆疊在一起的骰子，總是

圖 2



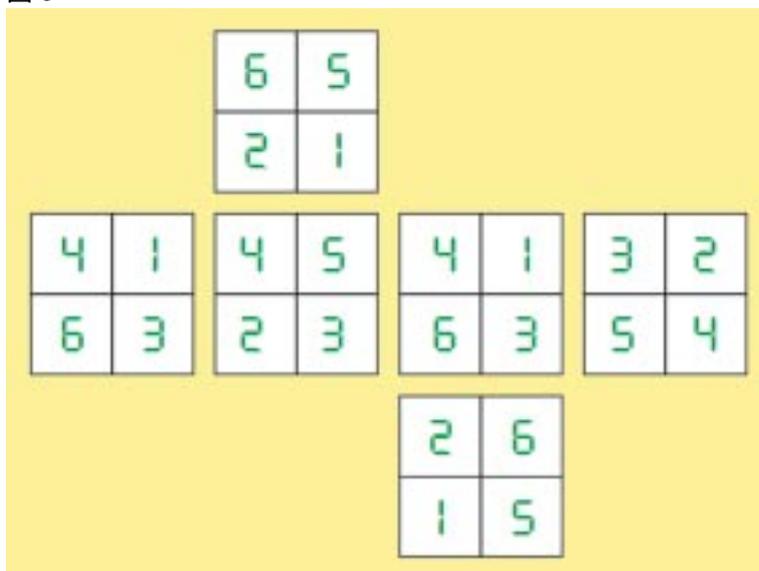
可以看到，每層環繞四面的各數字和必是14，算式不就是 7×2 為14嗎？平面展示圖如圖2。

我本來是想將三顆骰子組成一條數線，九顆骰子便組成一片三階正方形數陣。然而經過嘗試，我發現如此的數字配置並不能形成幻方。好可惜喔！不過看看表面的九宮格，倒使我想起了一種非常流行的立體益智玩具，風靡世界的魔術方塊，簡稱為魔方，在香港叫作「扭計骰」。魔方發明者是雕塑家兼建築學教授魯比克，或譯魯貝克，原文Rubik，讀作ㄉㄨㄨㄛˊ ㄅㄛˊ。魔方的構造不只一種，原始樣式是個三階立方體，每面有九格，六種顏色分別是紅、橙、黃、綠、藍、白。魔方經過多年演進，也有每面十六格的四階立方體，以及每面廿五格的五階立方體，甚至更古早的樣式，每面四格的二階立方體也有得賣。至於其他形式的變化構造，比方說有三角形表面的正四面體，也有五邊形表面的正十二面體等等，更有立方體變化形式之圓球體，實在是五花八門、不勝枚舉呀！在此我並不是要討論擲骰子得幾點的機率問題，也不是怎樣旋轉魔術方塊的問題，我是想到怎樣把幾顆骰子堆疊在一起，以形成立方體的樣子。

玩家先拿出一顆骰子，旁邊加上三顆骰子，可以組成二乘二的正方形數陣，上面再加上一層同樣四顆骰子的正方形數陣，便是八顆骰子的立方體了，我稱為二階骰子立方體。此立方體是個正六面體，剛好有八個頂點，是以每顆骰子都有三面點數露在表

面。當然玩家也可以學標準魔術方塊，用廿七顆骰子組成三階骰子立方體，不過這樣組合的話，每片表面中心的骰子只有單面的點數露在表面，不符合假定的條件，亦即每顆骰子都有三面點數露在表面。而且每片表面有九顆骰子，組成三乘三的正方形數陣，我試過，如此的數字配置並不能形成和幻方。所以呢，無妨變通設計吧！我把此問題簡化成，玩家只使用八顆骰子，堆砌成二階骰子立方體，看看怎樣可以使每片表面的點數和相等呢？

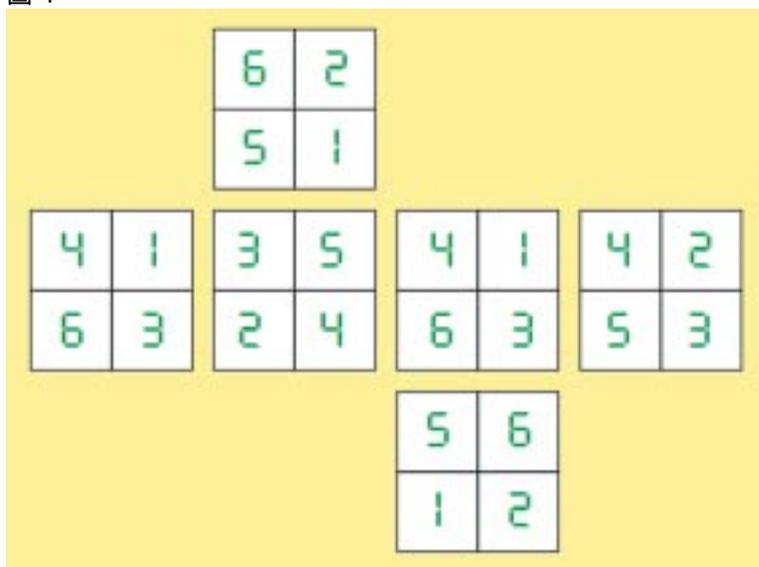
圖 3



俺本著玩票玩個夠的態度，嘗試拼湊了幾個答案，恭錄如下。請大家觀賞這些骰子立方體的平面圖啦！

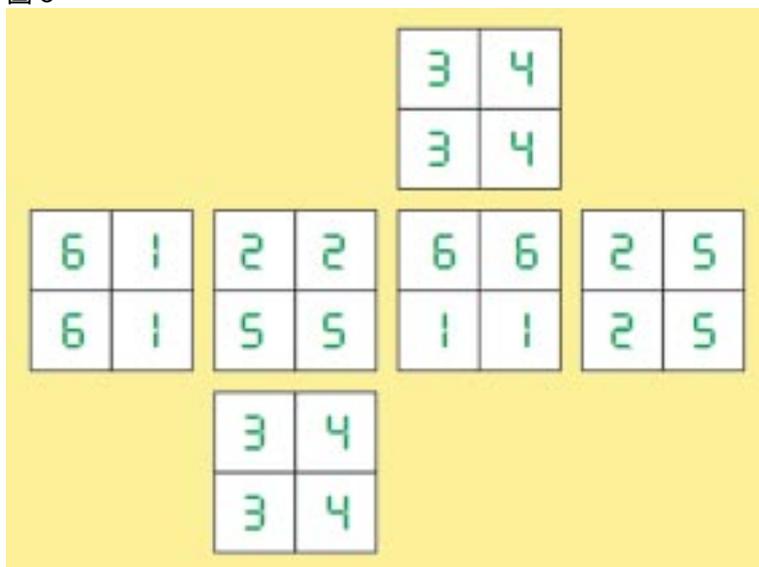
且看圖3的答案、圖4的答案，兩者構造幾乎是一樣的，每面均無同數，各有二組補數3與4、二組補數2與5，可以互換位置。

圖 4



且看圖5的答案，每面都有二對平行同數，即1與6、2與5、3與4，各二對，對稱特性極佳。且看圖6的答案，有兩面是單一同數，即2、2與5、5，另兩面各有二對1與6之交叉同數、二對3與4之平行同數。

圖 5



且看圖7的答案，有兩面是單一同數，即3、3與4、4，另一面有二對1與6之交叉同數。且看圖8的答案，只有一面有二對1與6之平行同數。

以上六個答案都是二階骰子立方

圖 6

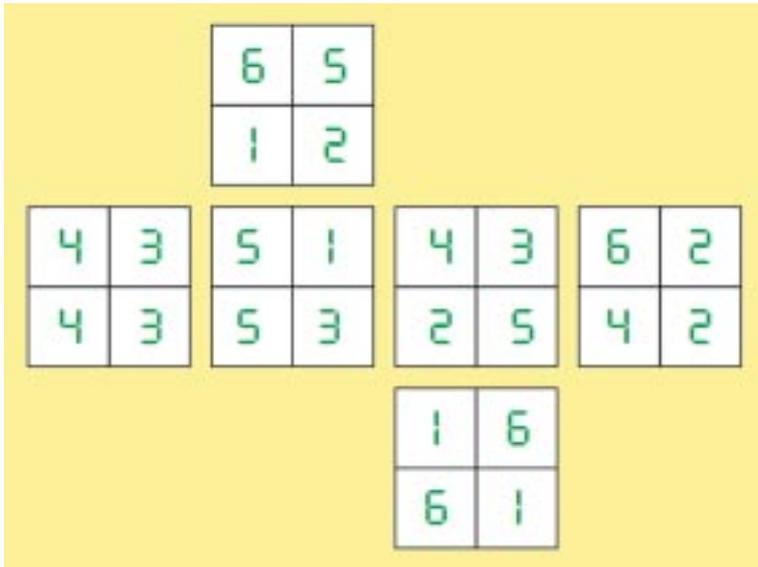


圖 7

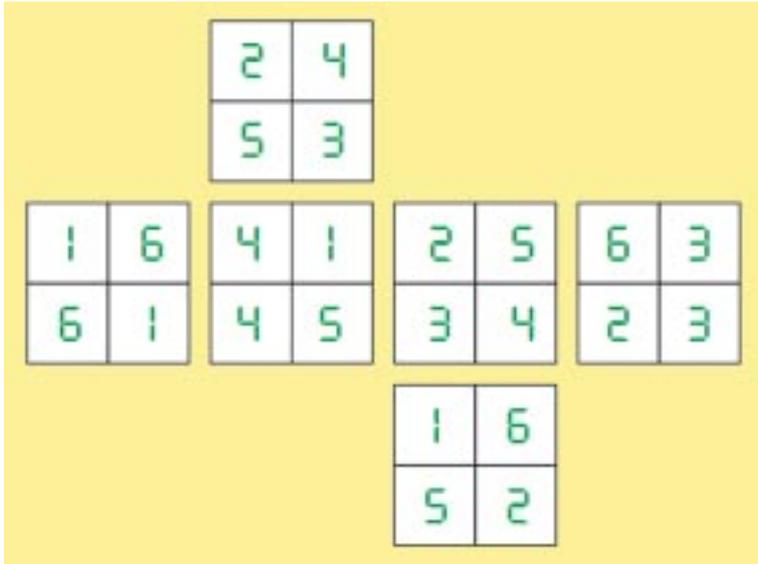
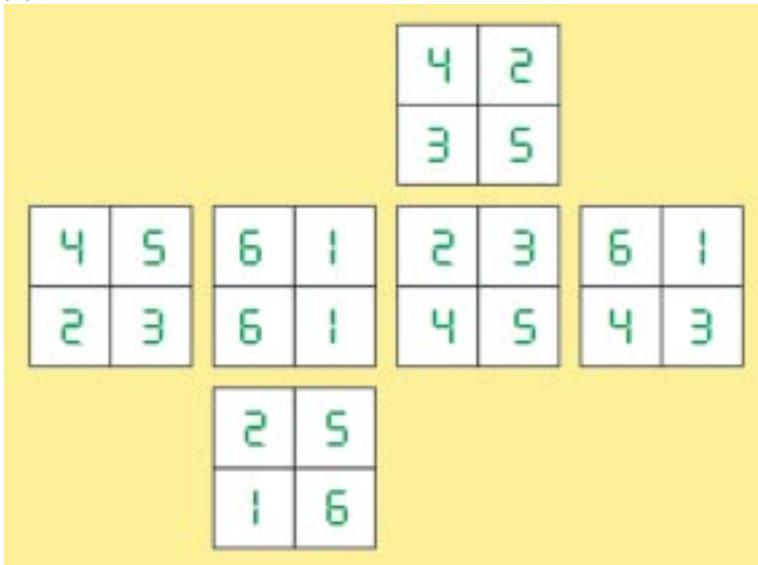


圖 8



體，各表面數字和皆等於七乘以二，即14，其整體數字和為十四乘以六，亦即84。玩家試玩二階骰子立方體，尚可保持前述的假定條件，亦即每顆骰子都有三面點數披露在表面。可是以下玩家試玩三階骰子立方體時，上述每顆骰子皆可三面表露的條件便辦不到了。首先，玩家瞭解三的立方是27，用廿七顆骰子堆成三階骰子立方體，空間內核心那一顆骰子可以置而不論，亦即點數披露在表面者共有廿六顆；位於頂點的八顆骰子還是三面表露，位在各邊中間的十二顆骰子為雙面表露，位居各表面中心的六顆骰子為單面表露。為方便顯示位置，吾人以金黃色代表三面表露，玫瑰色代表雙面表露，白色代表單面表露。

三階骰子立方體有六片表面，都是橫三格、縱三格的正方形，亦即九宮格。我的設想是每片表面週圍有八格，各格數字以七之補數兩兩對角出現，共有四對，四個七便是28，玩家可令各表面中心格之數字依序為1、2、3、4、5、6，也以七之補數相互對面出現；如此各表面九格之數字和即可構成連續自然數，亦即29、30、31、32、33、34。玩家不難算出， $29 + 34 = 30 + 33 = 31 + 32 = 63$ ，於是整個三階骰子立方體，全表面數字和為六十三乘以三，得積189是也。

三階骰子立方體之答案以頂點奇偶數為區別者，平面展示圖如圖9。

圖 9

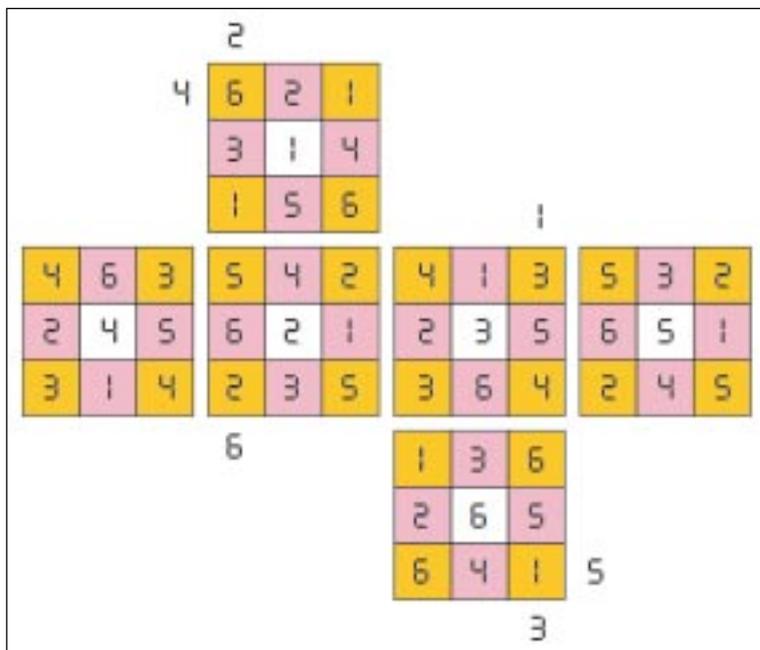
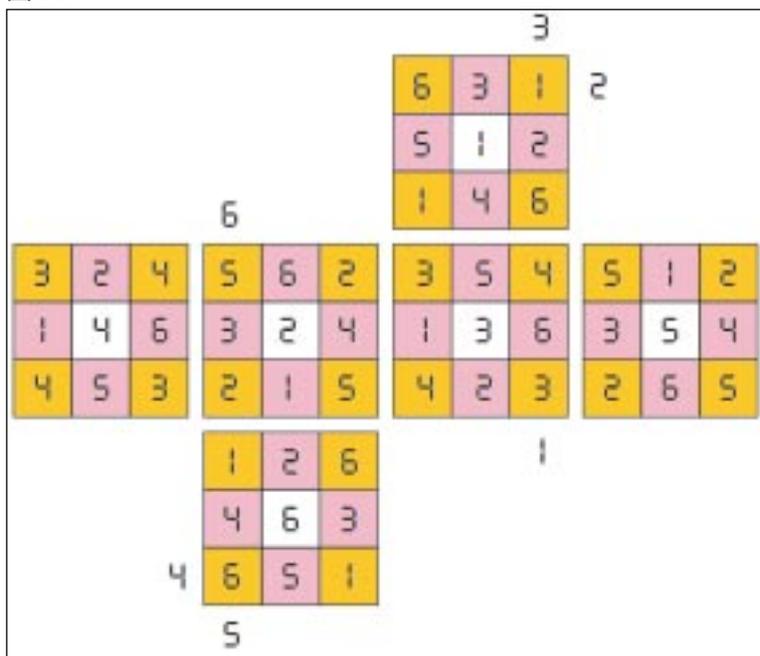


圖 10



此處奇數是 1、3、5，偶數是 2、4、6。三階骰子立方體之答案以頂點多少數為區別者，平面展示圖如圖 10。此處多數是 4、5、6，少數是 1、2、3。

順便驗算總和，這兩種三階骰子立方體都有六片表面，每面各有九格， $9 \times 6 = 54$ ，整體共有五十四格，而數字 1、2、3、

4、5、6 各出現九次，因為 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ ，二十一乘以九，得積 189 沒錯。

當然玩家還可以試玩更高階的組合狀況，像是四階骰子立方體、五階骰子立方體等等，在此限於篇幅，我便予以割愛，以後有機會再說了。拼湊三階骰子立方體時，我本來以為表面數字總和 189，只是個加出來的結果罷了，並沒有什麼特別的奧妙。後來想想我纔發現這個數真有些特別呢！稍微動筆算算，189 等於 125 加 64，亦即 5 的立方加上 4 的立方；而 189 也等於 216 減 27，亦即 6 的立方減去 3 的立方。所以此數是個可以用相異自然數立方和、相異自然數立方差同時表達的自然數，而且 $3 + 6 = 9 = 4 + 5$ ，以計算元素而言，兩邊數字和亦相等。不過這並不算是甚麼新發現，古代數學家早已知道，以連續自然數平方和為計算，3 的平方加上 4 的平方，等於 5 的平方，即 $9 + 16 = 25$ ；以連續自然數立方和為計算，3 的立方加上 4 的立方，再加 5 的立方便等於 6 的立方，即 $27 + 64 + 125 = 216$ 。

此外，玩家據此也可以找到另外兩個類似數，即 6、5 之立方差等於 3、4 之立方和， $216 - 125 = 91 = 27 + 64$ ；而 6、4 之立方差等於 3、5 之立方和， $216 - 64 = 152 = 27 + 125$ 。嗯嗯，真是單純又美麗呀！

我的感想是，數學遊戲嘛，玩家的思路有時候必須按問題的發展狀況做出些許變化，進而修改條件，以便求得解答，美其名

曰適應，見機便宜行事，其實就是打混，未能堅守法則。我自己認為，打混並非都是壞事，所謂該混則混，混之有道便好。成語說，渾水摸魚，自己想要自摸嗎？哼哼哼，可不要摸魚摸到大白鯊啊！

通篇觀覽此文，自己頗感汗顏，俺瞎掰的程度實在不低呀！到底怎麼個說法呢？道具是我自己選的，問題是我自己提的，規則是我自己制訂的，條件是我自己改變的，最後連答案也是我自己湊的。嚟，真是夠了吧！在本文插圖內，我都使用數字代替骰子各圓點；如果看官您把插圖內各數字都改成原來的圓點，可以帶來更直接的觀賞美感。到最後纔發覺，俺竟然忘記說明怎樣摺合以上諸圖形。

因為此間我都使用右手形式骰子，玩家要從平面圖還原到立方體，必須摺合各表面，包含紙面下空間；如果我改成用左手形式骰子，那麼玩家要從平面圖還原到立方體，必須摺合各表面，包含紙面上空間。

骰子固然是一種相當有趣的數學玩具，然而沉迷賭博並非好事，對賭博有興趣的玩家還會運用各種動物當作賭具呢！例如賽狗、賽馬、賽鴿、鬥牛、鬥雞、鬥蟋蟀等等，諸如此類。今年適逢虎年，看官您也曉得，我一向很愛唬爛的，窮極無聊時，便運用迴文句法，弄了篇遊戲之作，名曰《動物園之虎》。繞口令如下：

虎唬虎，人人唬，忍人唬，虎忍人，
忍人人，虎忍忍，虎忍虎，人忍人，
唬唬虎，虎唬人，人人人，忍忍忍，
唬唬唬，虎虎虎，人唬虎，虎唬唬，
人忍人，虎忍虎，忍忍虎，人人忍，

人忍虎，唬人忍，唬人人，虎唬虎。

這段迴文也沒甚麼特別意思，一笑置之罷了。就美學原理來說，對稱、重複、整齊、諧調始終是其特點。而人之所以會唬弄與人之所以要忍耐，牽涉到知行之間的因果關係。古代哲學家對此方面也有許多深刻論述，然而囿於所知，我便不多噓了。今年暑假家人與我到蘇州與杭州旅遊幾日，我在清河坊老街區買到幾顆文字骰子，其表面既不是圓點，也不是數字，而是六種動作摸、吸、咬、舔、吹、打。不知道是哪個情趣天才設計了這種有趣的骰子，令我感到挺新鮮的，應該頗適合情侶們使用。

咦，不是數學文章嗎？我怎麼會講到那回事去了？啊哈，各位看官請別忘了，按照萬物皆數的數學史觀，性也是數嘛！然而求其典雅的話，我想可以把上述動作改為六藝比較好些，亦即禮、樂、射、御、書、數，或是另外六樣雅好，詩、詞、畫、棋、琴、笛也可以。於是自己也好擱置那些不達邊際的性聯想，轉而師法道德經的標準句式，順便囉嗦幾句。老子曰：「道可道，非常道；名可名，非常名。」夫賭天博地者，未嘗以知可知，非常知乎？尤其以行可行，非常行焉！友聲

作者簡介

田銘莒

電工 78 級，退伍後求學於中山大學電機工程研究所，曾致力探討注音翻譯法，並對數學產生濃厚興趣。曾服務於鋼鐵業及工研院，目前從事敬業樂群、誨人不倦的教育工作。